

അധ്യായം 5 ഘനരൂപങ്ങൾ

ആമുഖം

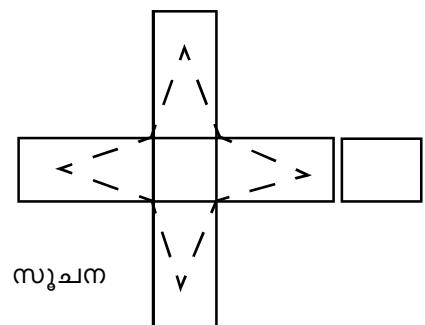
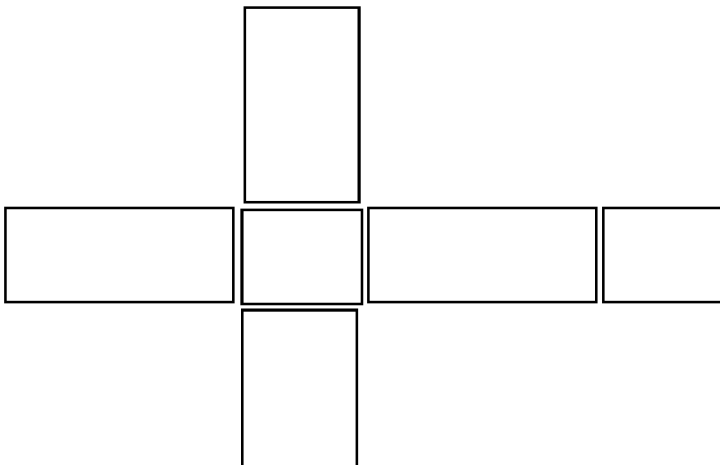
പ്രായോഗിക ജീവിതത്തിൽ വിവിധ ഘന രൂപങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കേണ്ട സന്ദർഭങ്ങൾ വരാറുണ്ട്. സ്തംഭങ്ങളെക്കുറിച്ചും അവയുടെ വ്യാപ്തം, പരപ്പളവ് എന്നിവ കണക്കാക്കുന്നതുമായ മാർഗ്ഗങ്ങൾ എങ്ങനെയെന്ന് മുൻ ക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. സമചതുരസ്തൂപിക, വൃത്ത സ്തൂപിക, ഗോളം, അർദ്ധഗോളം എന്നീ ഘനരൂപങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നത്.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ▶ സ്തൂപിക
- ▶ സമചതുര സ്തൂപിക
- ▶ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദവക്, പാർശ്വവക്, ഉയരം, ചരിവുയരം, ഇവ അറിയുന്നതിനും അവയുടെ പരസ്പര ബന്ധം കണ്ടെത്തുന്നതിനും.
- ▶ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്
- ▶ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം
- ▶ വൃത്ത സ്തൂപിക
- ▶ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ആരം, ഉയരം, ചരിവുയരം എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
- ▶ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ്, ഉപരിതല പരപ്പളവ്
- ▶ ഗോളം-ഉപരിതല പരപ്പളവും വ്യാപ്തവും
- ▶ അർദ്ധഗോളം- ഉപരിതല പരപ്പളവും വ്യാപ്തവും
- ▶ സംയുക്ത രൂപങ്ങൾ- പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾ

പ്രവർത്തനം 1

ഗ്രൂപ്പുകളാക്കി തിരിച്ച കുട്ടികൾക്ക് വിവിധ വലുപ്പത്തിലുള്ള സമചതുര സ്തംഭങ്ങൾ നൽകുന്നു. അവയിൽ ഒന്ന് നിവർത്തിയതിന്റെ മാതൃക ചിത്രത്തിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇവയിൽ നിന്ന് സമചതുര സംതംഭത്തിന്റെ അതേ പാദമുള്ളതും അഞ്ച് മൂലകളുള്ളതുമായ രൂപം നിർമ്മിക്കാനുള്ള പ്രവർത്തനം നൽകാം.



പ്രവർത്തനം 2

പാദമുഖങ്ങൾ ത്രികോണം, ചതുരം, ഷഡ്ഭുജം എന്നിവ ആയ സ്തംഭങ്ങൾ നൽകി നിർത്തിവെച്ച് മുകളിൽ കൊടുത്ത പ്രവർത്തനത്തിന്റെ ആവർത്തനം.

ചർച്ച, ക്രോഡീകരണം.

കണ്ടെത്താവുന്ന വസ്തുതകൾ

- സ്തൂപികയ്ക്കുള്ള പൊതു പ്രത്യേകതകൾ
- പാദമുഖം, പാർശ്വമുഖം
- പാദവക്, പാർശ്വവക്
- ശീർഷം

പ്രവർത്തനം 3

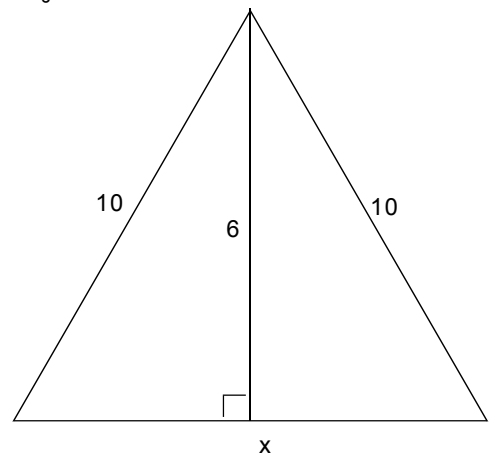
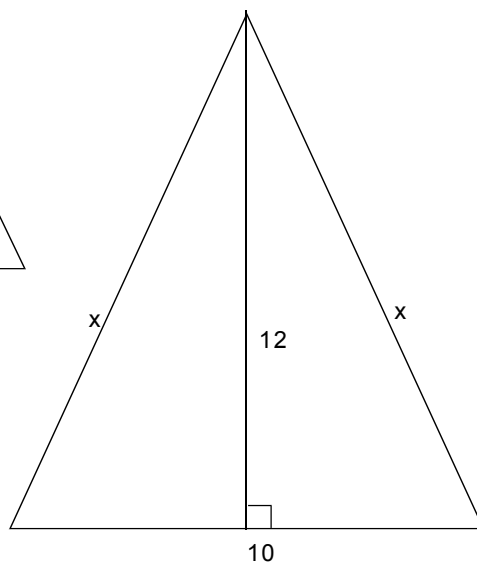
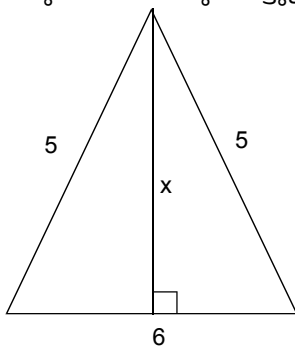
വർക് ഷീറ്റ്

ചില സമചതുര സ്തൂപികകളുടെ പാദത്തിന്റെ വശവും പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ അളവുകളും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പാദത്തിന്റെ വശത്തിന് ചേരുന്ന പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ അളവുകൾ ചേരുമ്പടി ചേർത്തെഴുതുക.

പാദത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ അളവ് (സെ.മി)	പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ (സെ.മി)
11	5, 12, 12
6	10, 11, 10
5	8, 4, 8
4	9, 9, 6
	7, 7, 7

പ്രവർത്തനം 4

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ x ന്റെ വില കാണുക.

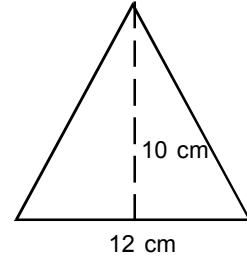


മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കാണുക.

പ്രവർത്തനം 5

ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ ചിത്രം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ പാദവക്കിന്റെ നീളവും ചരിവുയരവും ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ

- ആ മുഖത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്ര?
- സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് എന്ത്?
- പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
- ഉപരിതല പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്.



പ്രവർത്തനം 6

പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമബഹുഭുജ സ്തൂപികയുടെയും പാദത്തിന്റെ നീളം a യും ചരിവുയരം l ഉം ആകുന്നു. പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

ക്രമ നമ്പർ	സ്തൂപിക	ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ പരപ്പളവ്	പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ്
1	സമഭുജത്രികോണ സ്തൂപിക	$\frac{1}{2} al$	$3 \times \frac{1}{2} al = \frac{1}{2} \times 3a \times l$
2	സമചതുര സ്തൂപിക	$\frac{1}{2} al$	$4 \times \frac{1}{2} al = \frac{1}{2} \times 4a \times l$
3	സമപഞ്ചഭുജ സ്തൂപിക		$5 \times \frac{1}{2} al =$
4	സമഷഡ്ഭുജ സ്തൂപിക		 =
5	സമ സപ്തഭുജ സ്തൂപിക		 =
			 =
6.	n വശമുള്ള സമബഹുഭുജ സ്തൂപിക		 =

സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വതല പരപ്പളവ് = $\frac{1}{2} \times$ പാദചുറ്റളവ് $\times$ ചരിവുയരം
എന്ന വാക്യത്തിലേക്ക് എത്തിച്ചേരാൻ ശ്രമിക്കുമല്ലോ?

പ്രവർത്തനം 8

സമചതുര സ്തുപികയുടെ ചില അളവുകൾ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വിട്ടഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

ക്രമ നമ്പർ	ഉയരം (സെ.മീ)	ചരിവുയരം (സെ.മീ)	പാദവക് (സെ.മീ)	പാർശ്വവക് (സെ.മീ)	പാദവികിർണ്ണം (സെ.മീ)
1	36	45			
2	12		18		
3		25	30		
4			72	60	
5				20	24
6	48				40
7	15	17			

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

- ഒരു സമചതുര സ്തുപികയുടെ പാദവക്സിന്റെ നീളം 10 സെ മി ഉം, ചരിവുയരം 14 സെമിയും ആയാൽ അതിന്റെ പാർശ്വതല പരപ്പളവും ഉപരിതല പരപ്പളവും കാണുക.
- ഒരു സമചതുര സ്തുപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 40 സെമി, ഉയരം 12 സെമി എന്നിവയാണ്. ആ സമ ചതുര സ്തുപികയുടെ പരപ്പളവ് കാണുക.
- സമചതുര സ്തുപികയുടെ ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 96 ച.സെ.മി ഉം ചരിവുയരം 12 സെമി ഉം ആയാൽ അതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കാണുക.
- സമചതുര സ്തുപികയുടെ എല്ലാ വക്കുകളും തുല്യമാണ്. വക്കുകളുടെ ആകെ നീളം 120 സെ.മീ ആയാൽ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കാണുക.
- സമചതുര സ്തുപികയുടെ പാദവക്സിന്റെ നീളം b യൂണിറ്റും ചരിവുയരം l യൂണിറ്റും ആയാൽ പാർശ്വതല പരപ്പളവ് ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്നിവ കാണാനുള്ള ബീജഗണിത വാചകം എഴുതുക.

സമചതുര സ്തുപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഏത് സമചതുര സ്തുപികയുടെയും വ്യാപ്തം അതിന്റെ അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിൽ ഒന്നാണ് എന്ന വസ്തുത പാഠപുസ്തക പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ ബോധ്യപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്.

പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ ഉരുത്തിരിയുന്ന വസ്തുത

$\text{സമചതുര സ്തുപികയുടെ വ്യാപ്തം} = \frac{1}{3} \times \text{പരപ്പളവ്} \times \text{ഉയരം}$
--

പ്രവർത്തനം 9

പാദപരപ്പളവ് 100 ച സെമീ ഉം ഉയരം 15 സെമിഉം ആയ സമചതുര സ്തുപികയുടെ വ്യാപ്തമെന്ത്?

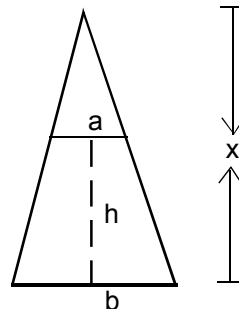
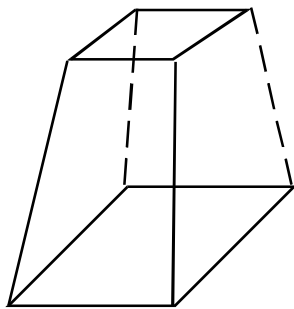
$$\begin{aligned}
 \text{വ്യാപ്തം} &= \frac{1}{3} \times \text{പരപ്പളവ്} \times \text{ഉയരം} \\
 &= \frac{1}{3} \times 100 \times 15 \\
 &= 500 \text{ ഘന സെന്റിമീറ്റർ}
 \end{aligned}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

- ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 80 സെ.മീ ഉയരം 33 സെമി ആയാൽ വ്യാപ്തമെന്ത്?
- പാദചുറ്റളവ് 64 സെമിഉം, ചരിവുയരം 17 സെമിഉം ആയിട്ടുള്ള സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.
- സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് 2320 ച.സെ.മീ ഉം ഒരു പാദവക്കിന്റെ നീളം 40 സെമി ഉം ആയാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്?
- ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദ വികിർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 18സെമി ഉം പാർശ്വവക് 15 സെമി ഉം ആയാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.
- പാദവക്കിന്റെ നീളം 21 സെമി ഉം വ്യാപ്തം 2940 ഘന സെമിയുമായ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉയരം കാണുക.
- 3200 ഘനസെമി വ്യാപ്തമുള്ള ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉയരം 24 സെമി ആയാൽ പാദ പരപ്പളവ്, ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്നിവ കാണുക.

സ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

പാദവക്കിന്റെ നീളം b യൂണിറ്റ് ആയ കട്ടിയായ ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ശീർഷത്തിന്റെ ഭാഗത്ത് നിന്ന് പാദവക്കിന്റെ നീളം a യൂണിറ്റ് ആയ ചെറിയ ഒരു സമചതുര സ്തൂപിക മുറിച്ച് മാറ്റുന്നു. ഏകിൽ ശേഷിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുന്ന വിധം.



സ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം=
വലിയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം
- ചെറിയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

സദൃശ ത്രികോണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകത അനുസരിച്ച്

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} b^2 x - \frac{1}{3} a^2 (x-h) \\
 &= \frac{1}{3} \left[b^2 \frac{bh}{b-a} - \frac{1}{3} a^2 \left[\frac{bh}{b-a} - h \right] \right] \\
 &= \frac{\frac{1}{3} b^3 h - \frac{1}{3} a^2 b h + \frac{1}{3} a^2 (bh - ah)}{b-a} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} h [b^3 - a^2 b + a^2 b - a^3]}{b-a} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} h [b^3 - a^3]}{b-a} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} h x (b-a) (b^2 + ab + a^2)}{b-a} \\
 &= \frac{1}{3} h (b^2 + ab + a^2)
 \end{aligned}$$

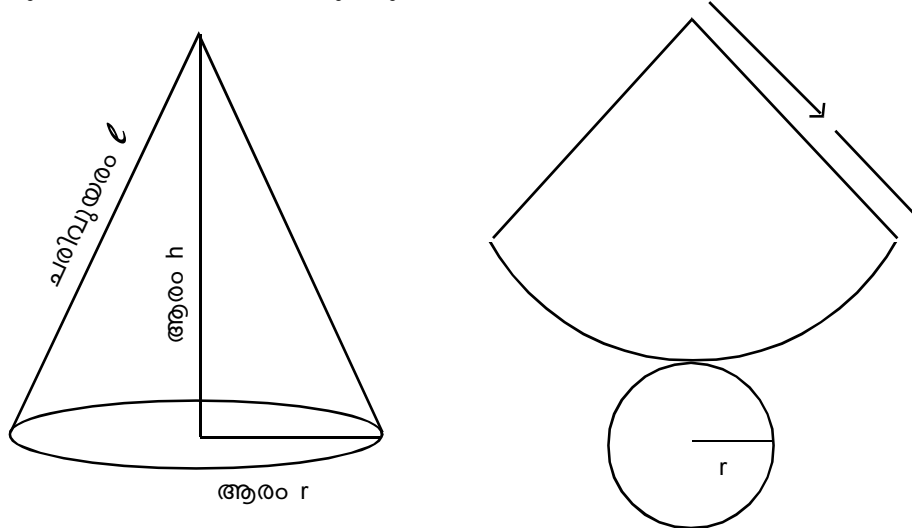
$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} &= \frac{x-h}{x} \\
 ax &= b(x-h) \\
 x(b-a) &= bh \\
 x &= \frac{bh}{b-a}
 \end{aligned}$$

വൃത്തസ്തൂപിക

പ്രവർത്തനം 1

കട്ടികടലാസ് കൊണ്ട് നിർമ്മിച്ച വൃത്തസ്തൂപിക വിതരണം ചെയ്ത് അതിന്റെ ആരം, ചരിവുയരം, ഉയരം എന്നിവ പരിചയപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. തുടർന്ന് ഒട്ടിച്ച ഭാഗത്തിൽ കൂടി മുറിച്ച് പാദമുഖം, പാർശ്വമുഖം (വക്രമുഖം) എന്നിവ വേർപെടുത്തുക.

ചിത്രം



പാദമുഖം വൃത്തവും വക്രമുഖം വൃത്താംശവുമായും ലഭിക്കുമല്ലോ.

പ്രവർത്തനം 2

കട്ടികടലാസിൽ വരച്ച 15 സെ മി ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്ന് 120° കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കുക. അതിന്റെ ചാപനീളം കാണുക. അത് ഉപയോഗിച്ച് പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. പാദമുഖമായി മുറിച്ചെടുക്കാവുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ആരമെത്ര സെ മി ആയിരിക്കും.

$$\text{ചാപനീളം} = \frac{120}{360} \times 2\pi \times 15$$

(ഒമ്പതാംതരത്തിലെ ചാപനീളം പേജ് 173 നോക്കുക.)

$$= \frac{1}{3} \times 2\pi \times 15$$

$$= 10\pi$$

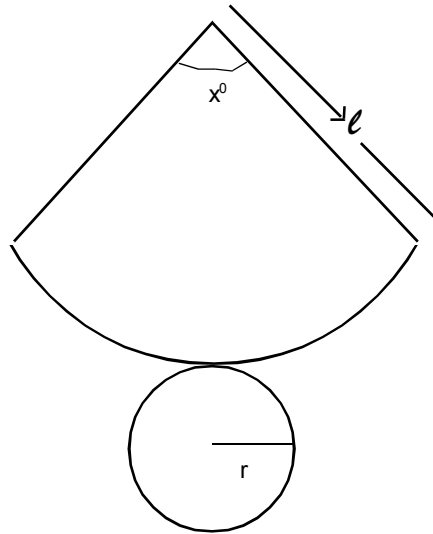
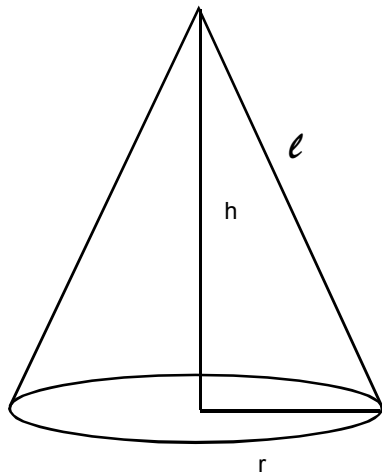
വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളവും വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവും തുല്യമാണല്ലോ.

പാദത്തിന്റെ ആര r യൂണിറ്റ് ആയാൽ

$$2\pi r = 10\pi$$

$$r = \frac{10\pi}{12\pi}$$

$$= 5 \text{ cm}$$



ആരം l ഉം കേന്ദ്രകോൺ x° ഉം ആയ വൃത്താംശം വളച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം r ആണെങ്കിൽ

$$= \frac{x}{360} \times 2\pi l = 2\pi r$$

$$\text{ഇതിൽ നിന്നും } \frac{x}{360} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$$

$$\therefore \frac{x}{360} = \frac{r}{l} \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

$\frac{x}{360} = \frac{r}{l}$ എന്ന തത്വം ഉപയോഗിച്ച് നിശ്ചിത അളവിൽ ആരവും ചരിവുയര വുമുള്ള വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിക്കാൻ വേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കണ്ടെത്താം.

പ്രവർത്തനം 3

30 സെ മി ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്ന് ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുത്ത് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെമി ആണെങ്കിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ അളവെത്ര?

പ്രവർത്തനം 4

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ അളവ് 27 സെ.മി അതിൽ നിന്നും 20° കേന്ദ്രകോണുള്ള ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുത്ത് വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിച്ചാൽ അതിന്റെ ആരം എത്ര?

പ്രവർത്തനം 5

72° കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വളച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന് 314 സെമി പരപ്പളവുണ്ടെങ്കിൽ സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വോന്നതി കാണുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് അതുകൊണ്ടാണുപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവിന് തുല്യമാണല്ലോ?

വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അതേ ആരമായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ അളവ് x° ആണെങ്കിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{x}{360}$ ഭാഗമല്ലേ?

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം ℓ യൂണിറ്റാണെങ്കിൽ $\frac{x}{360} \times \pi \ell^2$ ആണല്ലോ.

എന്നാൽ $\frac{x}{360} = \frac{r}{\ell}$ എന്ന് മുമ്പ് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$\therefore$ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{r}{\ell} \times \pi \ell^2$

$= \pi r \ell$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഏതൊരു സ്തൂപികയുടെയും പാർശ്വതല പരപ്പളവ്

$\frac{1}{2} \times$ പാദചുറ്റളവ് $\times$ ചരിവുയരം എന്ന തത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ടല്ലോ.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്ല്ലോ.

$\therefore$ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് = $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times \ell$
 $= \pi r \ell$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് പാദപരപ്പളവിന്റെയും വക്രതല പരപ്പളവിന്റെയും തുകയാണ്. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്.

പാദത്തിന്റെ ആരം r യൂണിറ്റും ചെരിവുയരം ℓ യൂണിറ്റും ആയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്

$$= \pi r^2 + \pi r \ell$$

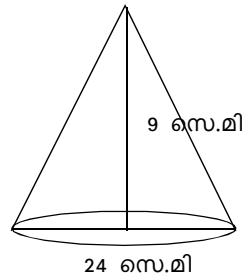
പ്രവർത്തനം

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം 7 സെമി ഉം ചരിവുയരം 16 സെമി ഉം ആയാൽ അതിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ്, ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്നിവ കാണുക.

വക്രതല പരപ്പളവ്	$= \pi r l$	ആരം $r = 7$ ചരിവുയരം $l = 16$
	$= \pi \times 7 \times 16$	
	$= 112 \pi$ ച.സെ.മി	
പാദ പരപ്പളവ്	$= \pi r^2$	
	$= \pi \times 7^2$	
	$= 49 \pi$ ച.സെ.മി	
ഉപരിതല പരപ്പളവ്	$= (112 \pi + 49 \pi)$	
	$= 261 \pi$ ച.സെ.മി	

കൂടുതൽ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 10π സെ.മി ഉം ചരിവുയരം 12 സെ.മിയും ആയാൽ അതുണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച ഷീറ്റിന്റെ പരപ്പളവെത്ര?
- 216° കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശ വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം 9 സെ.മി ആയാൽ അതിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ് കാണുക.
- ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവും ഉപരിതല പരപ്പളവും കാണുക. (പാദ വ്യാസം 24 സെ.മി ഉയരം 9 സെ.മി)



വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണ്ടെത്തിയ രീതിയിലൂടെ,

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3} \times$ പാദപരപ്പളവ് $\times$ ഉയരം എന്ന ബന്ധത്തിലെത്തിച്ചേരാമല്ലോ.

വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പേപ്പർ വെയിറ്റിന്റെ പാദവ്യാസം 8 സെ.മി ഉം ഉയരം 6 സെമി ഉം ആണ്.

അതിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്?

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം	$= \frac{1}{3} \times$ പാദപരപ്പളവ് $\times$ ഉയരം	
	$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$	$r = \frac{8}{2}$
	$= \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6$	$h = 6$
	$= 32 \pi$ ഘനസെമി	

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

ഏതാനും വൃത്തസ്തുപികയുടെ അളവുകൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു.
പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

പാദ ആരം	ഉയരം	ചരിവുയരം	പാദ ചുറ്റളവ്	പാദപരപ്പ് ളവ്	വക്രമുഖ പരപ്പളവ്	ഉപരിതല പരപ്പളവ്	വ്യാപ്തം
6	8	-	-	-	-	-	-
5	-	13	-	-	-	-	-
-	24	30	-	-	-	-	-
15	-	25	-	-	-	-	-
10	24	-	-	-	-	-	-
-	36	45	-	-	-	-	-
33	-	55	-	-	-	-	-
27	36	-	-	-	-	-	-
-	60	61	-	-	-	-	-

- വൃത്ത സ്തുപികാകൃതിയിൽ കുട്ടിയിരിക്കുന്ന മണലിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 75.36 മീറ്ററാണ്. ചരിവുയരം 13 മീറ്ററാണ്. കുട്ടിയിട്ടിരിക്കുന്ന മണലിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്? ഒരു ഘനമീറ്റർ മണലിന് 1500 രൂപ നിരക്കിൽ ആ മണലിന്റെ വിലയെന്ത്?
- വൃത്തസ്തുപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 64π ച.സ.മി, വക്രതല പരപ്പളവ് 80π ച.സെ.മി എങ്കിൽ അതിന്റെ ഉള്ളളവ് എത്ര ലിറ്ററാണ്?
- ഒരു വൃത്തസ്തുപികയുടെ വ്യാപ്തം 320π ഘന.സെമിയും ഉയരം 15 സെ.മീഉം ആണെങ്കിൽ വക്രതല പരപ്പളവ് കാണുക.
- ഒരു വൃത്തസ്തുപികയുടെ ആരവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5: 12 ആണ്. സ്തുപികയ്ക്ക് 2572 ഘന.സെമീ വ്യാപ്തമുണ്ടെങ്കിൽ വക്രതല പരപ്പളവ് കാണുക.
- രണ്ട് വൃത്തസ്തുപികയുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3:4 ഉം അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5:3 ഉം ആയാൽ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമെന്ത്?

ഗോളം

ഗോളത്തിന് ഒരു മുഖം മാത്രമേ ഉള്ളൂ എന്നും ഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, ആരം എന്നിവ എന്താണെന്നും വ്യക്തമാക്കുമല്ലോ. ഗോളത്തെ മുറിച്ചാൽ വൃത്തം ലഭിക്കുന്നു. ഗോളത്തെ രണ്ട് തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കി മുറിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, ആരം എന്നിവ അതേ ഗോളത്തിന്റേതെന്നായിരിക്കുമെന്ന വസ്തുതയും വ്യക്തമാക്കാം. ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്, വ്യാപ്തം എന്നിവ കാണാനുള്ള വാക്യങ്ങൾ നൽകാമല്ലോ.

ആരം r ആയ

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് $= 4\pi r^2$

വ്യാപ്തം $= \frac{4}{3} \pi r^3$

അർദ്ധഗോളം

കട്ടിയായ ഗോളത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗമാകത്തക്കവിധത്തിൽ മുറിച്ചാൽ ഓരോന്നും അർദ്ധഗോളമായിരിക്കുമല്ലോ.

ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയായിരിക്കും. അതിൽ നിന്നും ഉണ്ടാക്കുന്ന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ് എന്നും ആ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ പകുതിയായിരിക്കും. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തമെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പാദപരപ്പളവ് വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയല്ലെ. ഇതിൽ നിന്നും ചുവടെ കൊടുത്ത രീതിയിൽ ക്രോഡീകരണം നടത്താവുന്നതാണ്.

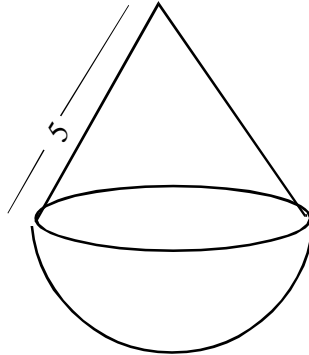
ആരം r ആയ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പാദപരപ്പളവ്	$= \pi r^2$
വക്രതല പരപ്പളവ്	$= 2\pi r^2$
ഉപരിതല പരപ്പളവ്	$= 3\pi r^2$
അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം	$= \frac{2}{3}\pi r^3$

പരിശീലന പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- 18 സെ മി വ്യാസമുള്ള ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവും വ്യാപ്തവും കാണുക.
- 576π ച.സെ.മി ഉപരിതല പരപ്പളവുള്ള ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്?
- 288π ച.സെ.മി വ്യാപ്തമുള്ള ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവെന്ത്?
- 40 ച.സെ.മി ഉപരിതല പരപ്പളവുള്ള ഗോളത്തിനെ രണ്ട് അർദ്ധഗോളമാക്കിയാൽ ഒന്നിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ്, ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്നിവ കാണുക.
- 24 സെ മി വ്യാസമുള്ള 20 ഫുട്ബോളുകൾ നിർമ്മിക്കാനാവശ്യമായ തുകലിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക?
- ഒരു ഇരുമ്പ് ഗോളത്തിന് 6 സെ മി വ്യാസമുണ്ട്. ഒരു ചെമ്പ് ഗോളത്തിന്റെ ഭാരം 7.5 ഗ്രാം ആണെങ്കിൽ ആ ഗോളത്തിന്റെ ഭാരമെന്ത്?
- 3 സെ മി ആരമുള്ള ലോഹനിർമ്മിതമായ കട്ടിയായ ഒരു അർദ്ധഗോളം ഉറക്കി അതേ വ്യാസമുള്ള കട്ടിയായ വൃത്ത സ്തൂപികയാക്കി മാറ്റിയാൽ അതിന്റെ ഉയരമെന്തായിരിക്കും?

UNIT TEST

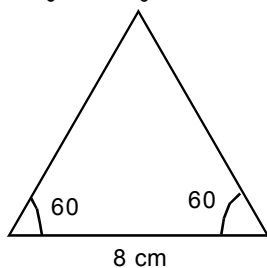
1. സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 20 സെമിളം ചരിവുയരം 18 സെമിയും ആയാൽ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കാണുക. 2
2. 196π ച.സെ.മി ഉപരിതല പരപ്പളവുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്? 2
3. ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 30π സെമി ഉം ചരിവുയരം 25 സെ മിളം ആയാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്? 3
4. ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ ആകൃതി അർദ്ധഗോളത്തിൽ അതേ വ്യാസമുള്ള വൃത്തസ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ച രീതിയിലാണ്. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 5 സെമി, പൊതുവ്യാസം 6 സെമി എന്നിങ്ങനെ ആയാൽ കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക. 3



5. ഒരു കട്ടിയായ പേപ്പർ വെയിറ്റിന് സമചതുര സ്തൂപികയുടെ നാല് പാർശ്വമുഖങ്ങളിൽ നിന്നും ഒരേ വ്യാസമുള്ള അർദ്ധഗോളം തുരന്നെടുത്ത ആകൃതിയാണുള്ളത്. സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 32 സെമിളം ചരിവുയരം 10 സെമിളം ആണ്. ഓരോ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെയും വ്യാസം ഒരു സെമി വീതമാണെങ്കിൽ പേപ്പർ വെയിറ്റിന്റെ വ്യാപ്തമെത്ര? 1
6. കട്ടിയായ അർദ്ധഗോളാകൃതിയായ വസ്തുവിന്റെ വ്യാസം 12 സെമി ആണ്. ഇതിൽ നിന്ന് പരമാവധി വ്യാപ്തമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ചെത്തിയുണ്ടാക്കുന്നു. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെയും വൃത്തസ്തൂപികയുടെയും വ്യാപ്തങ്ങൾ കാണുക. വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമെന്ത്? 3
7. സമചതുര സ്തൂപികാകൃതിയിൽ നിർമ്മിക്കുന്ന ഒരു കുടാരത്തിന് 6 മീറ്റർ ഉയരമുണ്ട്. പാദപരപ്പ് ഉവ് 256 ച.സെ.മീ ആണെങ്കിൽ കുടാരം പൊതിയാനാവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന് ചതുരശ്ര മീറ്ററിന് 300 രൂപ നിരക്കിൽ ആകെ എന്ന് ചെലവ് വരും. 3

മൂല്യനിർണ്ണയ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ ചിത്രം കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ സ്തൂപികയുടെ ആകെ വക്കുകളുടെ നീളമെന്ത്? ചരിവുയരമെത്ര? സ്തൂപികയുടെ ഉയരം കാണുക.



- വൃത്തസ്തൂരികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു മേൽക്കൂരയുടെ പാദചുറ്റളവ് 113.04 മീറ്ററാണ്. അതിന് 15 മീറ്റർ ചരിവുയരം ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ് കാണുക.
 - സമചതുര സ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പാദപരപ്പളവ് 900 ച.സെ.മി ആണ്. ചരിവുയരം 25 സെ.മി ആയാൽ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമെന്ത്?
 - പാദ ആരം 10 സെമി ഉം ചരിവുയരം 6 സെമിഉം ആകുന്ന വിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിക്കാമോ? ഈ അളവുകൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ ലഭിക്കുന്ന സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെന്ത്?
 - അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പരന്ന മുഖം, ഉപരിതലം എന്നിവയുടെ പരപ്പളവും അതേ ആരമുള്ള ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവും സമാന്തര ശ്രേണിയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
 - ഒരു വിദ്യാർത്ഥി 15 സെമി ആരമുള്ള ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുച്ച് 235.5 ച.സെ.മി വക്രമുഖ പരപ്പളവുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നു. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരമെത്ര? ആ വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്ര?
 - സമചതുര സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ ഉയരം 24 സെ.മി.ഉം പാദവക്കിന്റെ നീളം 20 സെ മി ഉം ആയാൽ അതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമെന്ത്?
 - അർദ്ധഗോളങ്ങളായ രണ്ട് പാത്രങ്ങളുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4:9 ആയാൽ അവയുടെ ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമെന്ത്?
 - 80 ഘന സെ.മി വ്യാപ്തമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ലോഹഗോളം ഉറുക്കി അതിന്റെ പകുതി ആരമുള്ള കട്ടിയായ അർദ്ധഗോളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു.
- എ) എത്ര അർദ്ധഗോളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?
- ബി) ഒരു അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്?
- കട്ടിയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസവും ഉയരവും തുല്യമാണ്. ഇതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തിൽ നിന്നും സിലിണ്ടറിന്റെ അതേ വ്യാസമുള്ളതും പകുതി ഉയരമുള്ളതുമായ വൃത്തസ്തൂപിക തുരന്ന് മാറ്റുന്നു. ശേഷിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തവും സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസത്തിന് തുല്യമായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തവും തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

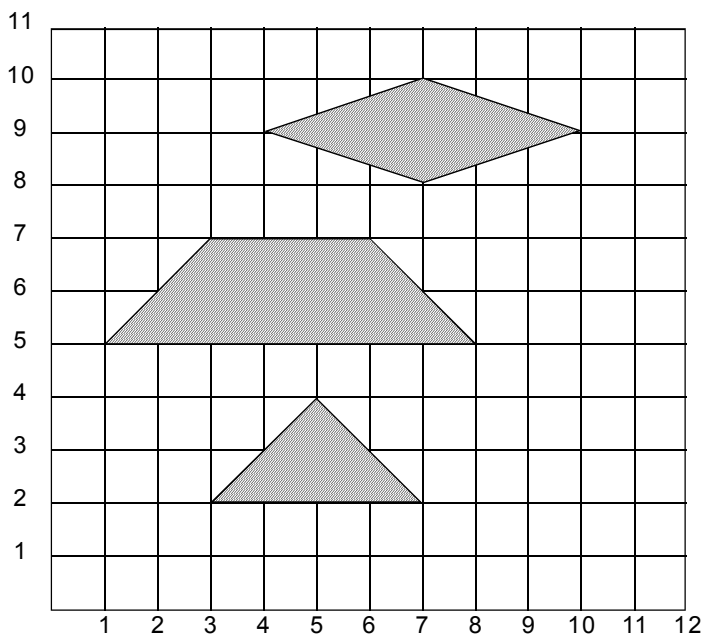
അധ്യായം 6 സൂചക സംഖ്യകൾ

ഒൻപതാം ക്ലാസിൽ രേഖീയ സംഖ്യ എന്ന അദ്ധ്യായത്തിൽ എല്ലാ സംഖ്യകളെയും ഒരു രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കളുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ഇതിലൂടെ സംഖ്യകളുടെ പരസ്പരബന്ധത്തെ ജ്യോമതീയമായി കാണുന്നതും ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ഒരു തലത്തിലുള്ള ഏത് ബിന്ദുവിനെയും സംഖ്യാ ജോഡി കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാമെന്നാണ് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. തുടർന്ന് ജ്യോമതീയ പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുന്നതും ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. തുടർന്ന് വരുന്ന ജ്യോമിതിയും ബീജഗണിതവും എന്ന അദ്ധ്യായത്തിൽ ഇത് കൂടുതലായി ചർച്ചചെയ്യുന്നു.

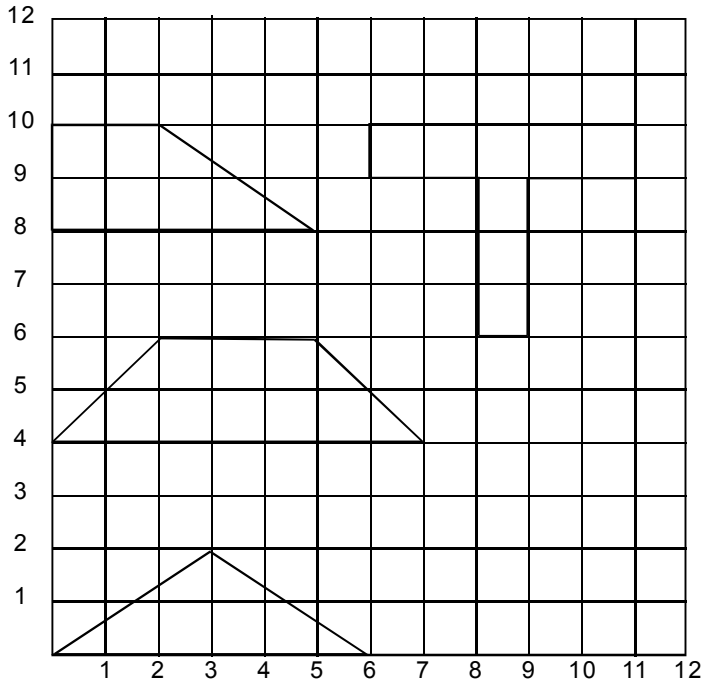
പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ▶ പരസ്പരം ലംബങ്ങളായ രണ്ട് രേഖകളും നീളം അളക്കാൻ യുക്തമായ ഒരു ഏകകവും ഉപയോഗിച്ച് തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാ ജോഡി ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.
- ▶ അക്ഷങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകങ്ങളുടെ പ്രത്യേകത
- ▶ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ രേഖകളിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകത.
- ▶ അക്ഷങ്ങളിലേയോ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ രേഖകളിലേയോ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം.
- ▶ അക്ഷങ്ങൾ തന്നിട്ടില്ലെങ്കിലും തന്നിട്ടുള്ള സൂചനകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ മറ്റ് ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കാണുന്നതിന്.

പാഠപുസ്തകത്തിലെ സംഖ്യാചിത്രം എന്ന പ്രവർത്തനം നൽകുമ്പോൾ ആദ്യമേ തന്നെ പുറത്തെ വരിയിൽ ശീർഷങ്ങൾ വരാത്ത രീതിയിൽ ബഹുഭുജങ്ങൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നു. അതിനുമുമ്പ് ഈയൊരു പ്രവർത്തനം കൊടുക്കാവുന്നതാണ്.



ഇവിടെ ശീർഷങ്ങളുടെ സംഖ്യാജോഡികൾ കാണുമ്പോൾ പരസ്പരം ലംബമായ ഏത് രണ്ട് വരകളെയും അടിസ്ഥാനമാക്കി പറയാമെന്നും പൊതുവായ ഒരു രീതി എന്ന നിലയിൽ ഇടത് കീഴ്വരകൾ അടിസ്ഥാനമാക്കി മൂലകളുടെ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിക്കാം എന്നത് കുട്ടിക്ക് ബോധ്യപ്പെടണം. തുടർന്ന് അരികുകളിലും ശീർഷങ്ങൾ വരുന്ന ചിത്രങ്ങൾ കൊടുക്കും.

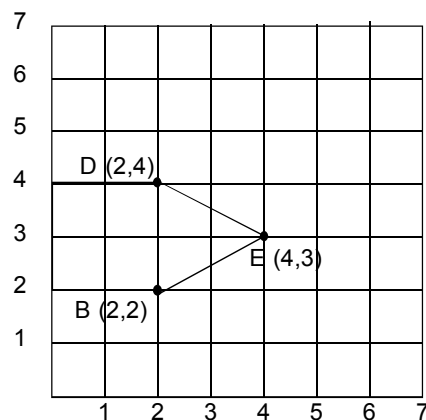


ഇവിടെ ഇടത് കീഴ് വരകൾക്ക് പൂജ്യം എന്ന പേർ നൽകി. കുട്ടി മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിന് (0,0) എന്ന പേർ നൽകുന്നു.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ജ്യാമതീയ രൂപമുണ്ടാക്കുന്നു.

1. A (2,3) B (5,3) C (4,6)
2. A (2,4) R (4,0) R (6,3) S (3,8)
3. R (0,1) M (4,1) N (6,5) O (2,5)

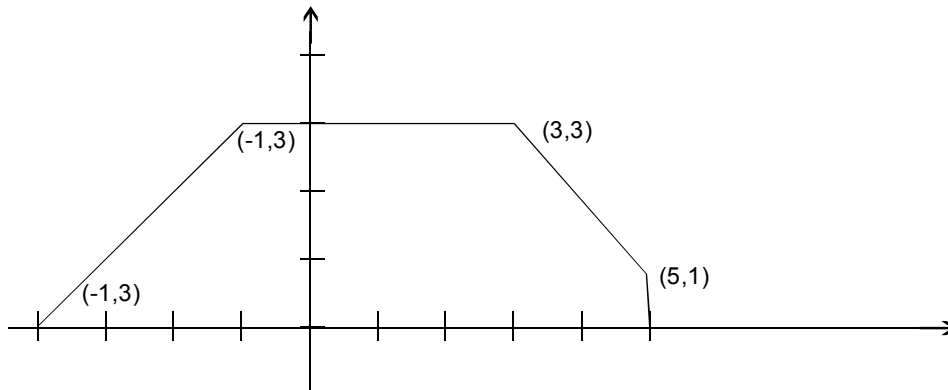
പാഠപുസ്തകത്തിൽ വീണ്ടും ചില സംഖ്യാ ചിത്രങ്ങൾ എന്ന പ്രവർത്തനത്തിന് മുമ്പേ ഈയൊരു പ്രവർത്തനം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.



ഇടത് വശത്ത് ഇതിന്റെ പ്രതിബിംബം വരച്ച് ഷഡ്ഭുജം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എന്തായിരിക്കണം

ഇവിടെ ഗ്രിഡുകൾ ഇടതുവശത്തേക്ക് നീട്ടുന്നതിന് വരയ്ക്കേണ്ട കുത്തനെയുള്ള വരകളെ ന്യൂന സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കേണ്ടിവരുന്നതിലേക്ക് കുട്ടികളെ നയിക്കേണ്ടതാണ്.

ചിത്രം ഇങ്ങനെയാവാം!



(അടുത്തടുത്ത വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തുല്യമായിരിക്കണം) അകലം എന്തുമാവാം.

ചതുരം വെട്ടിയെടുക്കാം.

10 നീളവും 8cm വീതിയുമുള്ള ഒരു കടലാസിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ നിന്ന് 6cm നീളവും 4cm വീതിയുമുള്ള ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുക്കുക.

നീളം നീളത്തോടും വീതി വീതിയോടും ചേർത്ത് മടക്കിയാൽ മദ്ധ്യത്തിലായി പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വരകൾ വരുന്നു എന്നും മറ്റ് വരകളില്ലാതെ ഇവമാത്രം ഉപയോഗിച്ച് മുറിക്കേണ്ട ചതുരത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിക്കാമെന്നും അവയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എങ്ങിനെ കണ്ടെത്താമെന്നും കുട്ടികൾക്ക് ബോധ്യപ്പെടുത്തേണ്ടതാണ്.

❖ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ x അക്ഷത്തിലെയും y അക്ഷത്തിലെയും ബിന്ദുക്കൾ തരം തിരിച്ചെഴുതുക.

$(\frac{1}{2}, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 2)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{3})$,
 $(0, 3)$, $(1.5, 0)$, $(2.5, 0)$, $(-2, -3)$

ബിന്ദുക്കൾ	അകലം
$(2, 0)$, $(6, 0)$	$4 = 2 - 6 $
$(1, 0)$, $(5, 6)$	
$(-3, 0)$, $(5, 0)$	
$(0, 3)$, $(0, 7)$	
$(0, -1)$, $(0, -2)$	
$(0, -3)$, $(0, 4)$	
$(0, -1)$, $(0, 1)$	

x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം x സൂചക സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവല വിലയാണ്.

ബിന്ദുക്കൾ	അകലം
(3,2), (3,6)	$4 = 2-6 $
(2,5), (2,-3)	
(-1,3), (-1,-4)	
(-2,6), (-2,1)	
(-5,1), (-2,1)	

y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം y സൂചക സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവല വിലയാണ്.

വർക്ക് ഷീറ്റ് -1

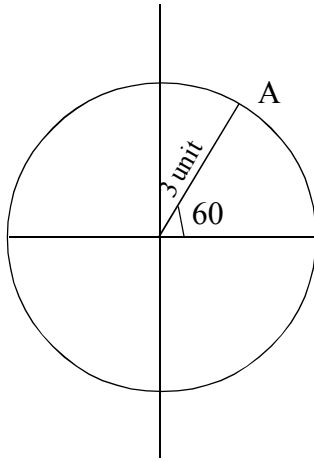
- 1 സൂചകങ്ങൾ വരച്ച് ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യാ ജോഡികൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.
A (2,3), B (-3,4), C (-4, -2), D (5,-3)
 2. ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ x അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യാജോഡികൾ മാത്രം എഴുതുക. (1, 3) , (0,3) , (3, 0) (-2, -2), (-3, 0), (8,0) , (0, 0)
 3. വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ രണ്ട് മൂലകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യാജോഡികൾ (1,2), (5,2). ചതുരത്തിന്റെ മറ്റ് മൂലകളുടെ സംഖ്യാജോഡി ഏതൊക്കെ?
 4. ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായി 5 സെമി ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ വൃത്തവും സൂചകാക്ഷങ്ങളും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെ?
 5. X അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം 8 യൂണിറ്റ് ആണ്. ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ ഒരുഗ്രബിന്ദു (6,0) എങ്കിൽ മറ്റേ അഗ്ര ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ എന്താണ്?
 6. സമചതുരം ABCD യിൽ A (-4,0), B(6,0) C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ x അക്ഷത്തിന് താഴെയാണെങ്കിൽ ഇവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്? സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണുക.
 8. സമാന്തരികം ABCD യിൽ A(0,0), B(6,0), C (8,4) എങ്കിൽ Dയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എന്ത്?
- ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഒരു രേഖയിലാണ്. അവ ഏത്?
(4,0), (-2,3), (3,-2), (4,3), (0,3), (0,4), (0,5)
 - ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി X അക്ഷത്തിൽ നിന്നും 2 യൂണിറ്റ് അകലെയുള്ള രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഏവ?
(2,4), (-2,2), (2,3), (5,2), (0,2), (2,0)
 - X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ രേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് (-2,4)
ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ, ഈ രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യാജോഡി ഏവ?
(2,3), (-2,1), (4,2), (-2,-4), (-2,0)
 - X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ രേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് (3, 5). ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 5 യൂണിറ്റ് അകലെ ഇതേ രേഖയിൽ എത്ര ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്?
അവയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.
 - (3,4), (3,5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?

വർക്ക് ഷീറ്റ് -2

- ❖ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ രണ്ട് മൂലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് $(1,2)$, $(5,2)$. മറ്റ് മൂലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്തുക.
- ❖ ഒരു വശം 4 യൂണിറ്റും ഒരു ശീർഷം $(3, -2)$ ഉം വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും വരക്കാവുന്ന ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ മറ്റ് മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.
- ❖ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ വശങ്ങളോട് കൂടിയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷകങ്ങൾ $(-3, 4)$, $(6, 4)$, $(6, 10)$ ഇവയാണ്. നാലാമത്തെ ശീർഷം ഏത്?
- ❖ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നീളം 6 യൂണിറ്റും വീതി 3 യൂണിറ്റുമാണ്. ഇത്തരം ചതുരത്തിന്റെ ഒരു മൂല $(-3, 2)$ ആണ്.
ഇപ്രകാരം എത്ര ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം?
അവയിൽ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ മറ്റ് മൂലകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എഴുതുക,
- ❖ സമാന്തരികം PQRS ൽ $P(2,4)$, $Q(10,4)$, $R(13,9)$ എങ്കിൽ S ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ ഏവ?
- ❖ ലംബകം ABCD യിലെ AB,CD എന്നീ വശങ്ങൾ X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്. $AB=10$ യൂണിറ്റ് $CD = 6$ യൂണിറ്റ് ആണ്. $A(-2,3)$, $C(5,9)$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ B,D ഇവയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.
- ❖ സമഭുജസമാന്തരികം ABCD യിൽ AB എന്ന വശം X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്. $A(4,3)$, $AB=6$ യൂണിറ്റും എങ്കിൽ സമാന്തരികത്തിന്റെ മറ്റ് മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കാണുക?
- ❖ ലംബകം PQRS ൽ PQ, RS ഇവ X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്. $PQ = 12$ യൂണിറ്റ് $RS = 6$ യൂണിറ്റ് ആകുന്നു. $P(-4,2)$, PQ, RS ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം 4 യൂണിറ്റും ആകുന്നു. R ന്റെ X സൂചകസംഖ്യ -1 ആണ്. എങ്കിൽ ലംബകം PQRS ന്റെ മറ്റെല്ലാ മൂലകളുടെയും സൂചക സംഖ്യകൾ കാണുക?
- ❖ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരങ്ങളായ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ എതിർ മൂലകൾ $(-2, 4)$, $(6,12)$ ആണ്. എങ്കിൽ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?
- ❖ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വികർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(3, 1)$, $(7, 4)$ ഇവയാണ്. ചതുരത്തിന്റെ മറ്റ് മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

വർക്ക് ഷീറ്റ് -3

1. സൂചകാക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് ഏകകം $1\frac{1}{2}$ സെമി ആയി എടുത്ത് A (2,1), B (3,-2), C (-2,-3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി $\triangle ABC$ വരയ്ക്കുക.
2. ഏകകം $\frac{1}{2}$ സെമി ആയി എടുത്ത് സൂചകാക്ഷങ്ങൾ വരച്ചു ഒരു ചതുരത്തിന്റെ 3 മൂലകൾ (2,3), (6,3), (6,9) ആകുന്നു. ചതുരത്തിന്റെ നാലാമത്തെ മൂല ഏത്?
3. (0,4) കേന്ദ്രമായി 5 സെമി ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ വൃത്തം X അക്ഷത്തിന്റെ ഖണ്ഡിതം എത്ര?
4. A യുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ പറയുക.



5. (-2,5), (6,5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്ന് പോവുന്ന രേഖ x അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?
ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലമന്ത്?

സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

ആമുഖം

നാളെ സൂര്യൻ ഉദിക്കുമോ? എങ്കിൽ ഏത് ദിക്കിൽ? ജീവനുള്ളവയ്ക്ക് മരണമുണ്ടോ? തുടങ്ങിയ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് സംശയമില്ലാതെ ഉത്തരം പറയാം. ഇന്ന് മഴ പെയ്യുമോ? ഇന്ത്യ ഒളിംബിക്സിൽ സ്വർണ്ണം നേടുമോ? അമ്മുവിന്റെ വീട്ടിലെ ആട് പ്രസവിച്ചാൽ കുട്ടി പെണ്ണായിരിക്കുമോ? അവൻ പരീക്ഷയിൽ ജയിക്കുമോ? തുടങ്ങിയ നിത്യജീവിതത്തിലെ പല പ്രസ്താവനകളിലും ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത യെക്കുറിച്ചുള്ള സൂചനയേ കാണാനുള്ളൂ. അതായത് ഒരു അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ ചെറിയൊരംശം ഉണ്ടല്ലോ. ഏതിനേയും അളക്കുക എന്നാണല്ലോ ഗണിതത്തിന്റെ ധർമ്മം. കൃത്യമായി ഫലം പ്രവചിക്കാൻ കഴിയില്ലെങ്കിലും ഈ അനിശ്ചിതത്വത്തെ അളക്കാൻ സഹായിക്കുന്ന ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു ശാഖയാണ് സാധ്യതാ സിന്താനം. ചുതുകളിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് Book on Game of Change എന്ന ഗ്രന്ഥം Gerolamo Cardano എന്ന ഇറ്റാലിയൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ രചിച്ചിട്ടുണ്ട്. Chevalier de-Mere എന്ന ഫ്രഞ്ച് പ്രഭു പകിടകളിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരു പ്രശ്നം പാസ്കൽ നോട് ചോദിക്കുകയുണ്ടായി. പാസ്കൽ ഫെർമയുമായി നടത്തിയ കത്തിടപാടുകളിൽ നിന്നാണ് സാധ്യതാ സിന്താനത്തിന്റെ ആഭിർഭാവത്തിലേക്ക് നയിച്ചത് എന്ന് കരുതപ്പെടുന്നു.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- സാധ്യത എന്ന ആശയം
- സാധ്യത- സംഖ്യാപരമായി കാണുന്നു.
- സാധ്യത കണക്കുകൂട്ടുന്നതിന് എണ്ണൽ സൂത്രങ്ങൾ

സാധ്യതകളും സംഖ്യകളും

പ്രവർത്തനം.

1 മുതൽ 24 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ എഴുതിയ കാർഡുകൾ ഒരു പെട്ടിയിൽ ഉണ്ടെന്ന് കരുതുക. (ഒരു കാർഡിൽ ഒരു സംഖ്യമാത്രം). ഇതിൽ നിന്ന് നോക്കാതെ ഒരു കാർഡ് എടുത്താൽ കിട്ടുന്ന കാർഡ് താഴെ പറയുന്നതിലേതിനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത എന്ന് കുട്ടികളോട് ചോദിക്കുക.

- 2ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്
- 7ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യ
- 3 ന്റെ ഗുണിതമായ സംഖ്യ
- 5ന്റെ ഗുണിതമായ സംഖ്യ

3ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ മറ്റുള്ളവയേക്കാൾ കൂടുതലുള്ളതിനാൽ 3ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത എന്ന് കുട്ടികൾ കണ്ടെത്തുമല്ലോ.

എങ്കിൽ കുറഞ്ഞ സാധ്യത ഏതിനാണ്?

ഒറ്റ സംഖ്യ, ഇരട്ട സംഖ്യ ഇവയിൽ ഏത് കിട്ടാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത എന്നിങ്ങനെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ ചോദിക്കുക. കുറഞ്ഞ സാധ്യത 7ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യയ്ക്കാണ് ഒറ്റസംഖ്യ. ഇരട്ട സംഖ്യ ഇവ രണ്ടിനും ഒരേ സാധ്യത എന്നും കുട്ടികൾ കണ്ടെത്താൻ സഹായിക്കുക.

സാധ്യത സംഖ്യകളിലൂടെ

ഇങ്ങനെ കണ്ടെത്തിയ സാധ്യതകളെ സംഖ്യകളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തി നോക്കാം.

പെട്ടിയിൽ ആകെ സംഖ്യകൾ 24

3ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ 3,6,9,12,15,18,21,24 എന്നിങ്ങനെ 8 സംഖ്യകൾ

അതായത് 24 സംഖ്യകളിൽ 8 എണ്ണമാണ് 3ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ. അതിനാൽ 3ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ വരാനുള്ള സാധ്യത = $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ എന്ന് പറയാവുന്നതാണ്.

താഴെ കൊടുത്ത പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

ആകെ സംഖ്യകൾ 24 എണ്ണം

	സന്ദർഭങ്ങൾ	കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ	എണ്ണം	സാധ്യത
1.	3ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ	3,6,9,12,15,18,21,24	8	$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
2.	2ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യ			
3.	7ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യ			
4.	5ന്റെ ഗുണിതം			
5.	ഒറ്റസംഖ്യ			
6.	ഇരട്ട സംഖ്യ			

പട്ടികയിൽ നിന്ന് കുറഞ്ഞ സാധ്യത, കൂടുതൽ സാധ്യത, തുല്യമായ സാധ്യത എന്നിവ കാണുക.

കൂടുതൽ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

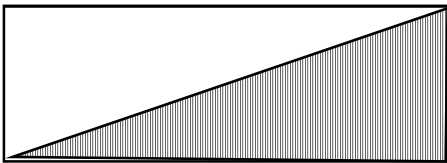
1. ഒരു നാണയം മുകളിലേക്കെറിയുന്നു. അപ്പോൾ തല (H) വരാനുള്ള സാധ്യതയും വാൽ (T) വരാനുള്ള സാധ്യതയും കാണുക.

2. ഒരു പകിട എറിഞ്ഞാൽ ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

(സൂചന: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ മുകളിൽ വരുമല്ലോ. ഇരട്ട സംഖ്യ 2,4,6 ഇവയാണ്. ഇപ്പോൾ സാധ്യത.

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3.



ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ച് പെൻസിൽ കൊണ്ടു ഒരു കുത്തിട്ടാൽ ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ത്രികോണത്തിൽ വരുവാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

4. ഒരു പെട്ടിയിൽ 2ന്റെ ആദ്യത്തെ 100 ഗുണിതങ്ങളും മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 3ന്റെ ആദ്യത്തെ 100 ഗുണിതങ്ങളും എഴുതിയ കാർഡുകൾ ഉണ്ട്. 3ന്റെ ഗുണിതം എഴുതിയ കാർഡ് കിട്ടാൻ ഏത് പെട്ടിയിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്.

രണ്ടെണ്ണമെടുത്താൽ

രണ്ട് പകിടുകൾ ഒന്നിച്ചെറിയുന്നു. അപ്പോൾ രണ്ടിലെയും സംഖ്യകളുടെ തുക 8 വരാനുള്ള സാധ്യത കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇത് പട്ടികപ്പെടുത്താം.

പകിട 1	പകിട 2	തുക	തുക 8 വരുന്നത്	
1	1	2		
1	2	3	2,6	
1	3	4	3,5	
1	4	5	4,4	
1	5	6	5,3	സാധ്യമാകുന്ന ഫലങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം 36. ഇതിൽ തുക 8 വരുന്നത് 5 എണ്ണം അതിനാൽ തുക 8 വരാനുള്ള സാധ്യത = $5/36$ ആണ് (ഇവിടെ ആകെ എണ്ണം 36 എന്നത് 6×6 ആണ് എന്ന് ബോധ്യപ്പെടുക.)
1	6	7	6,2	
2	1	3		
2	2	4		
2	3			
2	...			
.....				
.....				
.....	...			
6	6			

ഒരു പെട്ടിയിൽ 5 വെളുത്ത മുത്തുകളും 7 കറുത്ത മുത്തുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു മുത്ത് എടുത്താൽ അത് കറുത്ത മുത്ത് ആവാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? തുടർന്ന് ഒരു വെളുത്ത മുത്തും ഒരു കറുത്ത മുത്തും എടുത്തുമാറ്റി വെക്കുന്നു. ഇനി പെട്ടിയിൽ നിന്ന് ഒരു മുത്ത് എടുത്താൽ അത് കറുത്ത മുത്ത് ആവാനുള്ള സാധ്യതയും കാണുക? വീണ്ടും ഒരു വെളുത്ത മുത്തും ഒരു കറുത്ത മുത്തും എടുത്തുമാറ്റിയ സാധ്യതയും കാണുക. ഈ പ്രവർത്തനം തുടർന്നാലോ?

താഴെ കൊടുത്ത പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കാം.

ഘട്ടം വെളുത്ത മുത്തുകൾ കറുത്ത മുത്തുകൾ കറുത്ത മുത്ത് സാധ്യത ഏറ്റവും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കൂടുതൽ/കുറവ്

1	5	7
2	4	6
3	3	5
4	2	4
5	1	3

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒന്നിച്ചെറിഞ്ഞാൽ രണ്ട് തല വരാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? ഒരു തല മാത്രം വരാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

(സൂചന: തല H എന്നും വാൽ T എന്നും സൂചിപ്പിച്ചാൽ ആകെ സാധ്യമാകുന്ന ഫലങ്ങൾ HH, HT, TH, TT എന്നിവ ആണല്ലോ. ഇത് 4 എണ്ണം.

രണ്ട് തല വരുന്നത് HH വരുമ്പോൾ മാത്രം.

അതിനാൽ തല വരാനുള്ള സാധ്യത = $1/4$

ഒരു തലമാത്രം വരുന്നത് TH, HT എന്നിവ വരുമ്പോഴാണ്. സാധ്യത $2/4=1/2$

മൂല്യനിർണ്ണയ സൂചകങ്ങൾ

1. രണ്ട് പകിട എറിയുമ്പോൾ രണ്ടിലും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുക്കുന്നു. അത് കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടെത്തുക.

തുക	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
സാധ്യത											

സാധ്യതകളുടെ ആകെ തുകയും കാണുക.

2. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്ത 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഒരു സംഖ്യ എടുത്താൽ അത് 5ന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?
3. മൂന്ന് നാണയം ഒന്നിച്ചെറിയുന്നു. സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ എഴുതുക. ഇതിൽ 3 തല കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്? 2 തല മാത്രം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്? ചുരുങ്ങിയത് 2 തല കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്ത് ഒരു തല മാത്രം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?
4. പച്ചയും മഞ്ഞയും നിറത്തിലുള്ള ആകെ 18 ബോളുകളുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു ബോളെടുക്കുമ്പോൾ പച്ചനിറത്തിലുള്ള ബോൾ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{3}$ ആണ്. എങ്കിൽ ഓരോ നിറത്തിലുള്ള ബോളുകളുടെ എണ്ണം എത്ര?

UNIT TEST

1. ഒരു പെട്ടിയിൽ 3 വെള്ള മുത്തുകളും 7 കറുത്ത മുത്തുകളും ഉണ്ട്. മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 4 വെള്ള മുത്തുകളും 6 കറുത്ത മുത്തുകളുമുണ്ട്. കണ്ണടച്ച് ഒരു മുത്ത് എടുക്കുമ്പോൾ കിട്ടേണ്ടത് വെള്ള മുത്താണെങ്കിൽ ഏത് പെട്ടിയിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്? 2
2. മൂന്നക്കമുള്ള ഒരു സംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. ഇത് ഒരേ അക്കമുള്ള സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? 2
3. 100ൽ താഴെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ ഒരു സംഖ്യ എഴുതിയാൽ അത് വർഗ്ഗസംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? 2
4. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 10 പഴുത്ത മാങ്ങയും 6 പച്ച മാങ്ങയും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു മാങ്ങ എടുത്താൽ പച്ചമാങ്ങ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? പഴുത്ത മാങ്ങ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? 2
5. രണ്ട് പകിടകൾ എറിഞ്ഞാൽ രണ്ടിന്റേയും ഗുണനഫലം ഒരു ഘനസംഖ്യകിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടെത്തുക. 2

അധ്യായം 8 തൊടുവരകൾ

ആമുഖം

ജ്യോതിതിയുടെ പിതാവെന്ന് വിശേഷിപ്പിക്കപ്പെടുന്ന യുക്ലിഡിന്റെ അഭിപ്രായത്തിൽ “ഒരു വര ഒരു വൃത്തത്തെ സന്ധിക്കുകയും, തുടർന്ന് നീട്ടിയാൽ സന്ധിക്കാതിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ, ആ വര വൃത്തത്തെ തൊടുന്നു.” ഈ നിർവ്വചനം തൊടുവര എന്ന ആശയത്തെ പ്രകടിപ്പിക്കുമെങ്കിലും എല്ലാ വള വുകൾക്കും ബാധകമാകത്തക്ക നിലയിൽ ഉപയോഗപ്പെടുത്താൻ കഴിയാത്തതാണ്. തൊടുവര എന്ന ആശയം കൃത്യമായി നിർവ്വചിക്കുന്നതിന് വിശകലന ജ്യോതിതിയുടെയും അവകലനത്തിന്റെയും ഭാഷ ഉപയോഗിക്കണം. ഇത്തരം നിർവ്വചനത്തിന്റെ ദൃശ്യാവിഷ്കാരമാണ് ഈ പാഠഭാഗം. ജ്യോതിതിയിലെ ചലനാത്മകതയുടെ പ്രധാനം ഏറ്റവും കൂടുതൽ ചർച്ചചെയ്യപ്പെടുന്ന പാഠഭാഗം കൂടിയാണിത്. വൃത്തത്തെ കുറിച്ച് നാം നേരത്തെ മനസ്സിലാക്കിയ നിരവധി ആശയങ്ങളുടെ ഉപയോഗം കൂടി അനിവാര്യമായതിനാൽ വൃത്തങ്ങൾ എന്ന അധ്യായത്തിന്റെ തുടർച്ചയായി ഈ പാഠഭാഗത്തെ കാണാവുന്നതാണ്.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

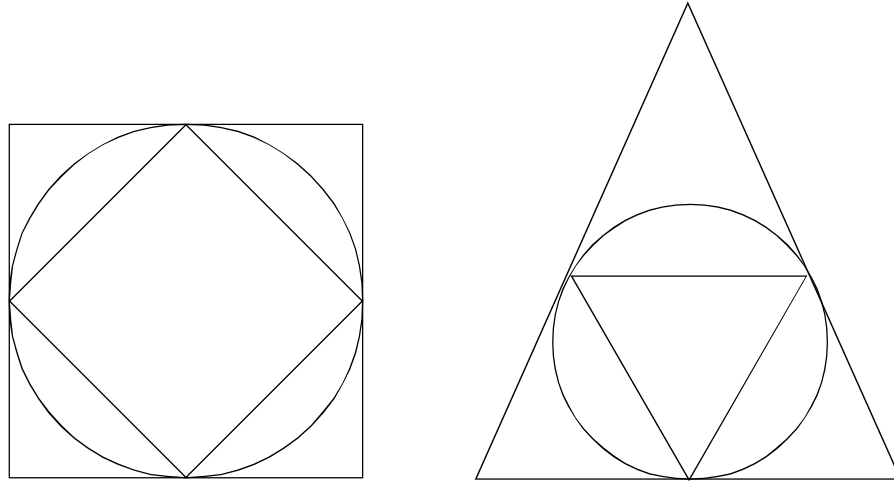
- ❖ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവര
- ❖ വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ ആരത്തിന് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വര ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്.
- ❖ വൃത്തത്തിന്റെ ഏത് തൊടുവരയും തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരത്തിന് ലംബമാണ്.
- ❖ വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ഏത് ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രണ്ട് തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം. ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ഈ തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണ്.
- ❖ വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ നിർണ്ണയിക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണം ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം അനുപൂരകങ്ങളാണ്.
- ❖ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണും അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുള്ള തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള ഓരോ കോണും, ഈ ഞാണിന്റെ മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിന് തുല്യമാണ്.
- ❖ ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്ന് കോണുകളുടെയും സമഭാജികൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.
- ❖ ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം.

പ്രവർത്തനം 1

കടലാസ്സിൽ നിന്ന് സമചതുരവും സമഭുജത്രികോണവും കുട്ടികൾ മുറിച്ചെടുക്കുന്നു. സമചതുരത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് മടക്കുന്നു. അപ്പോൾ കിട്ടിയ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഓരോ വശവും വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം തൊടുന്നതായി കാണാമല്ലോ.

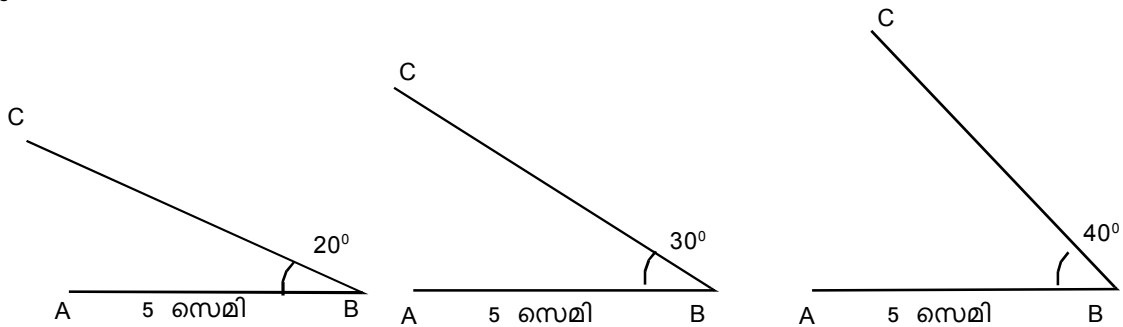
ഇതുപോലെ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് മടക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. ഇവിടെയും പുറത്തെ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശവും വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം തൊടുന്നതായി കാണാം.

തുടർന്ന് കുട്ടികൾ നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ സമചതുരവും സമഭുജത്രികോണവും വരയ്ക്കുന്നു. മുകളിൽ വിവരിച്ച പ്രവർത്തനം അതേ രീതിയിൽ വരച്ചും കാണുക്കാവുന്നതാണ്.



(ഐസിടി ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചലനാത്മകതയിലൂടെ ഈ ആശയം വ്യക്തമാക്കാവുന്നതാണ്)

പ്രവർത്തനം 2



ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന അളവിൽ മൂന്ന് കോണുകൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുന്നു. ഓരോന്നിലും A കേന്ദ്രമായി 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തങ്ങളും വരയ്ക്കുന്നു. മൂന്ന് സന്ദർഭങ്ങളിലും AB എന്ന വര വൃത്തത്തെ എത്ര ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്ന് ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

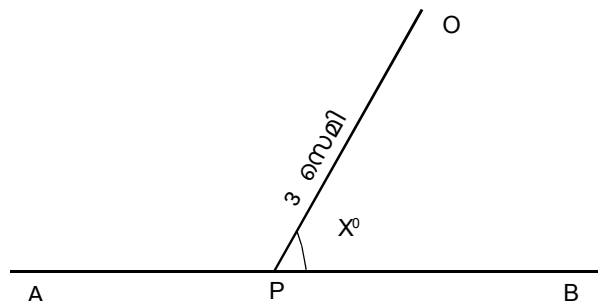
(ഈ പ്രവർത്തനങ്ങളിലൂടെ വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം തൊടുന്ന വരയെ (അതായത് തൊടുവരയെ) കുറിച്ച് കുട്ടികൾക്ക് ധാരണ ഉണ്ടാകുമല്ലോ)

പ്രവർത്തനം 3

ചിത്രത്തിൽ Pയിലെ ഒരു കോണിന്റെ അളവ് (x ന്റെ വില)

45° , 50° , 60° , 70° , 80° , 85° , 87° , 90° , 100° , ആകത്തക്കവിധം ഓരോ കടലാസ്സിൽ വരച്ച് ഓരോന്നും കുട്ടികൾക്ക് നൽകുന്നു. O കേന്ദ്രമായി 3 സെമി ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കുട്ടികളോട് ആവശ്യപ്പെടുന്നു. AB എന്ന വര വൃത്തത്തെ എത്ര ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്ന് ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

x ന്റെ വില 90° അല്ലാത്തപ്പോൾ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നുവെന്നും, 90° യോട് അടുക്കുന്നോറും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കുറഞ്ഞുവരുന്നുവെന്നും മനസ്സിലാക്കാമല്ലോ. x ന്റെ വില 90° ആകുമ്പോൾ മാത്രമാണ് എന്ന

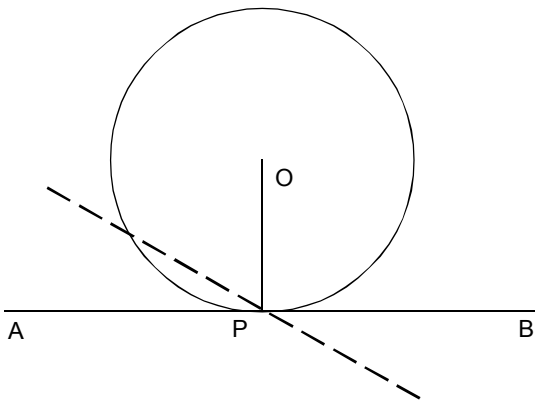


വര വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്നത് എന്ന് കാണാം. അപ്പോൾ AB എന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവര ആകുന്നു.

തുടർന്ന് പാഠപുസ്തകത്തിലെ പേജ് 146ൽ നൽകിയ വിശകലനത്തിലൂടെ ചുവടെ കൊടുത്ത സാമാന്യതയിൽ എത്തിച്ചേരാം.

വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ ആരത്തിന് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്.

3.5 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Pയിലെ തൊടുവര വയക്കുക.



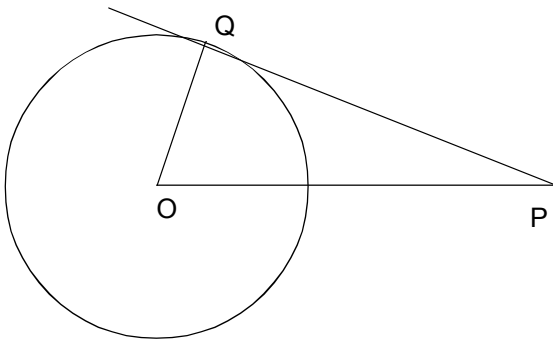
പ്രവർത്തനം 4

ചാർട്ട് പേപ്പറിൽ വരച്ച ചിത്രം നോക്കുക. ചിത്രത്തിൽ O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരയാണ് AB

OPയ്ക്ക് ലംബമല്ലാതെ Pയിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന ഏത് വരയും വൃത്തത്തെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽ കൂടി ഖണ്ഡിക്കുന്നു. എന്ന് കാണാമല്ലോ. (പാഠപുസ്തകം പേജ് 149) P യിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരയാകട്ടെ, മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുകയുമില്ല. അതുകൊണ്ട് ABഎന്ന വര OPയ്ക്ക് ലംബമാണ്.

വൃത്തത്തിലെ ഏതു തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരത്തിന് ലംബമായിരിക്കും.

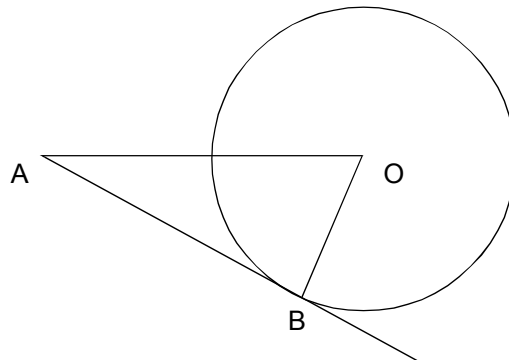
1



ചിത്രത്തിൽ Qഎന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ് PQ . Oവൃത്ത കേന്ദ്രവും, $\angle PQR = 55^\circ$ യും ആയാൽ $\angle OPQ$ എത്ര?

2

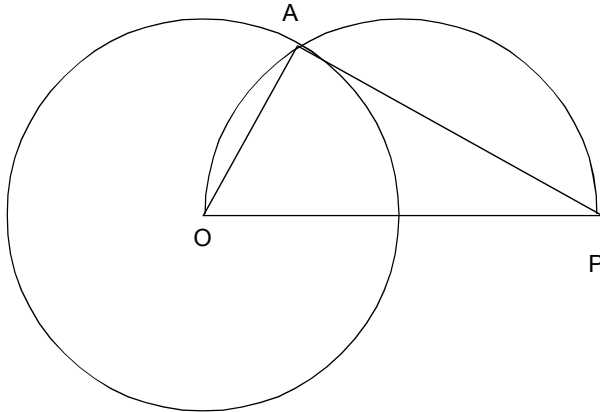
ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം. B യിലെ തൊടുവരയാണ് AB $OB = 8$ സെമി. $OA = 17$ സെമി. ആകുന്നു.
(1) $\angle ABO$ എത്ര?
(2) AB എത്ര?



പ്രവർത്തനം 5

- (i) AB എന്ന വര വരയ്ക്കുക. AB കർണമാകത്തക്കവിധം ഒരു മട്ടത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.
- (ii) O കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന് പുറത്ത് P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. OP കർണവും വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു മട്ട മൂലയും ആകത്തക്കവിധം ഒരു മട്ടത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

രണ്ടാമത്തേതിൽ മട്ടമൂല A എന്ന ബിന്ദുവാണെങ്കിൽ, വൃത്തത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി PA എന്ന വരയുടെ പ്രത്യേകത എന്ത്?
(PA വൃത്തിന്റെ തൊടുവര ആയിരിക്കുമല്ലോ?)



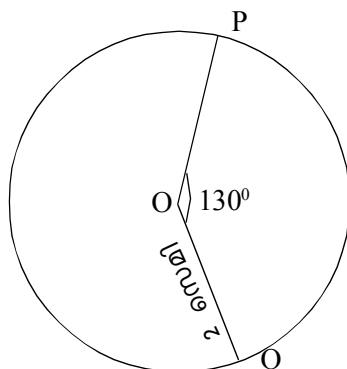
OP കർണമായും, വൃത്തിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദു മട്ട മൂലയായും മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ? OP വ്യാസമായ അർദ്ധവൃത്തം താഴെ വരയ്ക്കുകയാണെങ്കിൽ മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കാമെന്നും മട്ടമൂല B എന്ന ബിന്ദുവാണെങ്കിൽ PB വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരയായിരിക്കുമെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

പൈഥഗോറസ് സിന്താനമുപയോഗിച്ച് PA, PB ഇവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നും കാണാം.

വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ട് തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം. ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ഈ തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണ്.

- (i) 3.2 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 8 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. P യിൽ കൂടി വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ നീളം അളന്നെഴുതുക.
- (ii) 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. അതിൽ 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ AB എന്ന ഞാൺ വരയ്ക്കുക. A യിൽ കൂടിയും B യിൽ കൂടിയിൽ തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുക. തൊടുവരകൾ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും Aയിലേക്കും Bയിലേക്കും ഉള്ള അകലം അളന്നെഴുതുക.

പ്രവർത്തനം 6



- (i) തന്നിരിക്കുന്ന അളിൽ ചിത്രം വരയ്ക്കുക. P,Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലെ കോൺ എത്രയെന്ന് അളന്ന് കാണുക.

(ii) ചിത്രത്തിൽ PA, PB ഇവ തൊടുവരകളാണ്. O വൃത്തകേന്ദ്രം.

$\angle APB = 70^\circ$ ആകുന്നു.

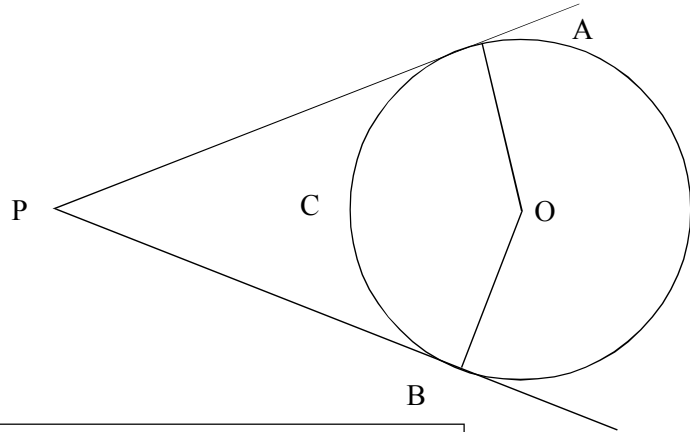
$\angle OAP$, $\angle OBP$ ഇവ എത്ര?

ചാപം ACBയുടെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ അളവെത്ര?

(ഈ പ്രവർത്തനത്തിൽ $\angle A$, $\angle B$,

ഇവ 90° വീതം ആയതുകൊണ്ട്

$\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$ എന്ന് കാണാം)

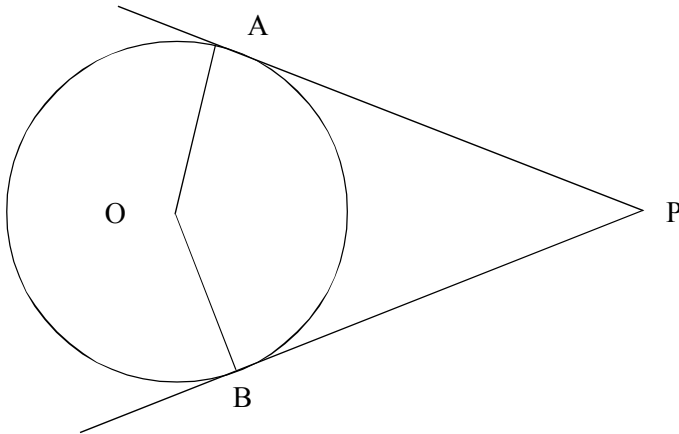


വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോണം, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം അനുപൂരകമാണ്.

പ്രവർത്തനം 7

ചുവടെ കൊടുത്ത ഓരോന്നിലും O വൃത്തകേന്ദ്രവും PA, PB ഇവ തൊടുവരകളാണ്.

(i)



$\angle APB = 50^\circ$ ആയാൽ

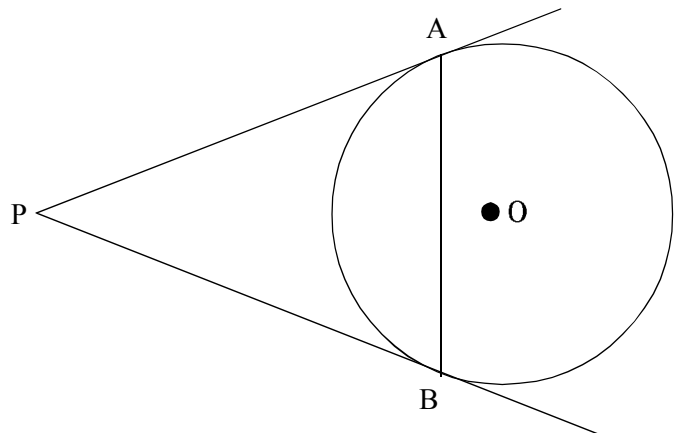
$\angle AOB = \dots\dots\dots$

(ii)

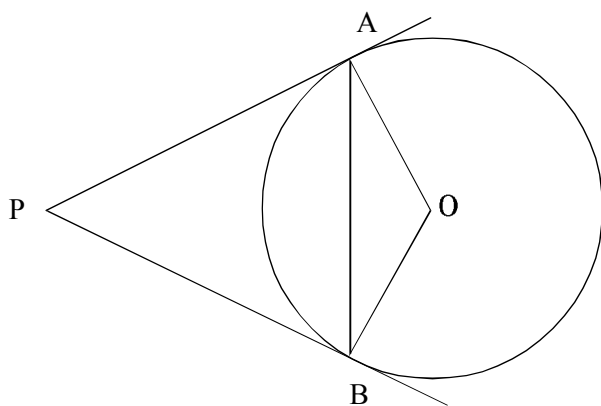
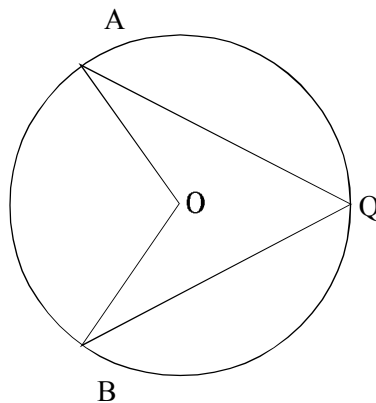
$\angle APB = 80^\circ$ ആയാൽ

$\angle PAB = \dots\dots\dots$

$\angle PBA = \dots\dots\dots$

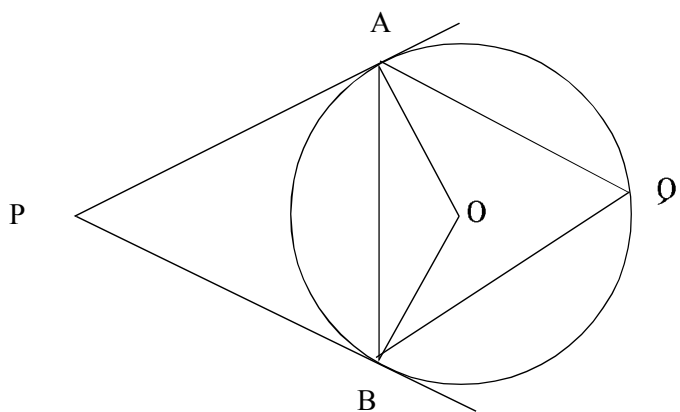
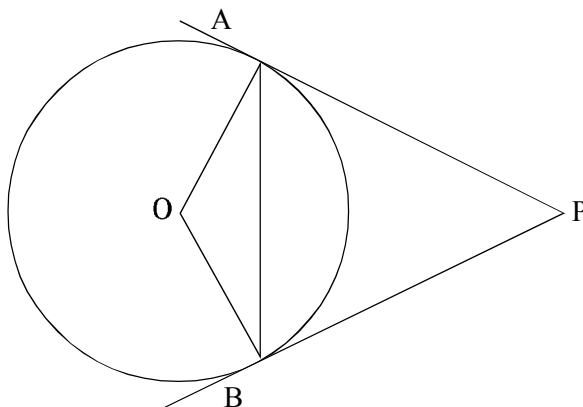


- (3) $\angle AOB = 100^\circ$ ആയാൽ
 $\angle AQB = \dots\dots\dots$

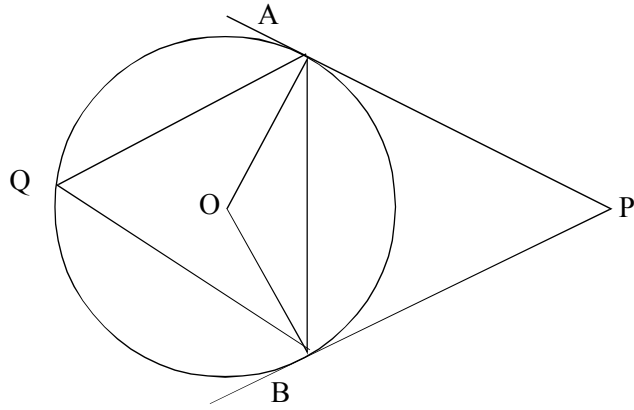


- (4) $\angle APB = 40^\circ$ ആയാൽ
 $\angle PAB = \dots\dots\dots$
 $\angle PBA = \dots\dots\dots$
 $\angle AOB = \dots\dots\dots$

- (5) $\angle PAB = 55^\circ$ ആയാൽ
 $\angle PBA = \dots\dots\dots$
 $\angle APB = \dots\dots\dots$
 $\angle AOB = \dots\dots\dots$



- (6) $\angle PBA = 50^\circ$ ആയാൽ
 $\angle PAB = \dots\dots\dots$
 $\angle APB = \dots\dots\dots$
 $\angle AOB = \dots\dots\dots$
 $\angle AQB = \dots\dots\dots$



- (7) $\angle PBA = x^\circ$ ആയാൽ
- $\angle PAB = \dots\dots\dots$
- $\angle APB = \dots\dots\dots$
- $\angle AOB = \dots\dots\dots$
- $\angle AQB = \dots\dots\dots$

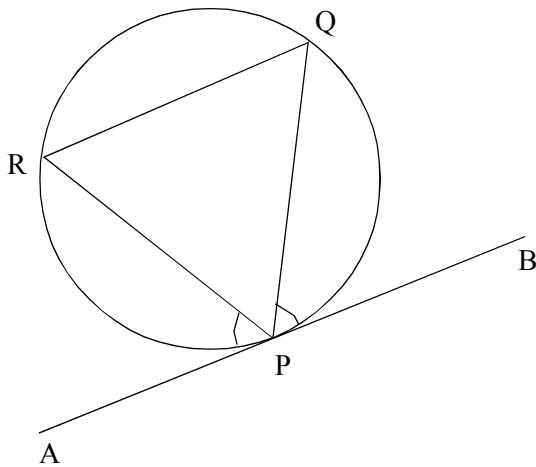
ഇവിടെ $\angle PBA = \angle AQB$ എന്ന് കാണാമല്ലോ.

$\angle PBA$ എന്നത് AB എന്ന ഞാണും, Bയിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ ആണ്. $\angle$

$\angle AQB$ എന്നത് മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണും.

വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഞാണം അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുകൂടിയുള്ള തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള ഓരോ കോണും, ആ കോണിന്റെ മറുവശത്തുള്ള വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിലെ കോണിന് തുല്യമാണ്.

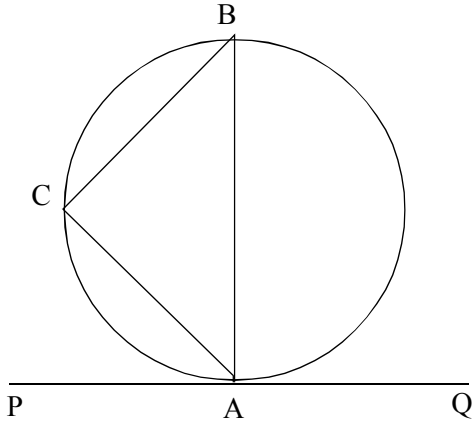
(1)



ചിത്രത്തിൽ P യിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരയാണ് AB

$\angle APR = 70^\circ$, $\angle BPQ = 65^\circ$ ആയാൽ $\triangle PQR$ ന്റെ കോണളവുകൾ എത്ര?

(2)



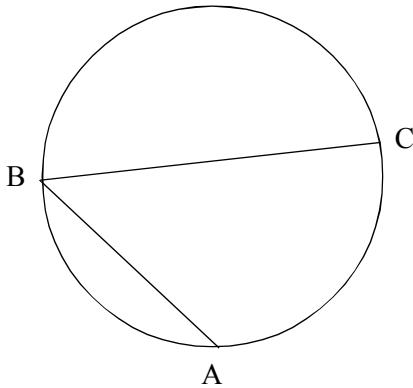
ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസവും PQ തൊടുവരയുമാണ്.

$\angle PAC = 65^\circ$ ആയാൽ $\triangle ABC$ യുടെ കോണളവുകൾ കാണുക.

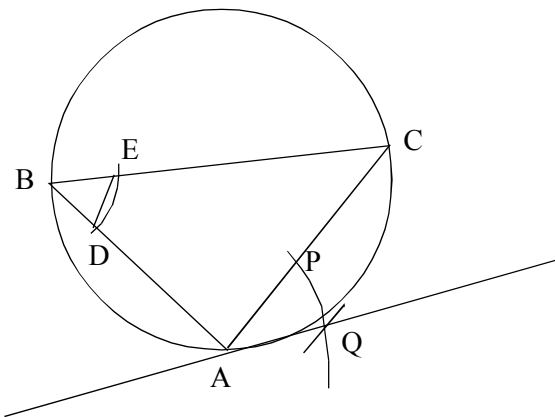
പ്രവർത്തനം 8

വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവര വരയ്ക്കുന്നതിന് ആരംഭിച്ച അതിന്റെ അറ്റത്തുകൂടി ലംബമായി ഒരു വര വരയ്ക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്തത്. കേന്ദ്രം ഉപയോഗിക്കാതെ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുവര വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങിനെയാണ് നോക്കാം.

വൃത്തത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു കോൺ നിർമ്മിക്കുക.



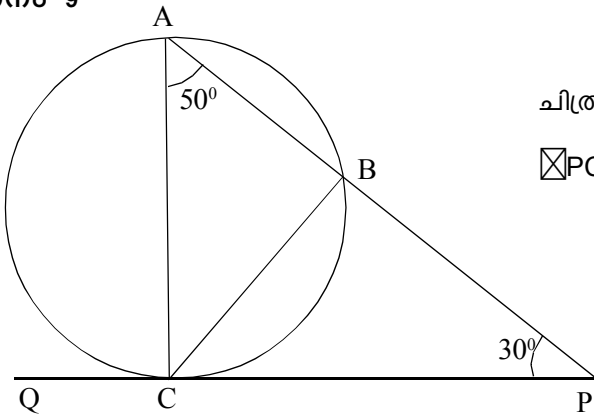
AC യോജിപ്പിച്ച് അതിനോട് ചേർത്ത് Aയിൽ $\angle ABC$ യുടെ അളവിൽ ഒരു കോൺ ഉണ്ടാകാത്തവിധം ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര A യിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവര ആയിരിക്കും.



(സൂചന: B കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ചാപം BA, BC എന്നിവയെ യഥാക്രമം D, E എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. A കേന്ദ്രമായി BD ആരത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചാപം AC യെ Pയിലും P കേന്ദ്രമായി DE ആരത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചാപം ആദ്യത്തെ ചാപത്തെ Q വിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle PAQ = \angle ABC$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.)

പ്രവർത്തനം 9

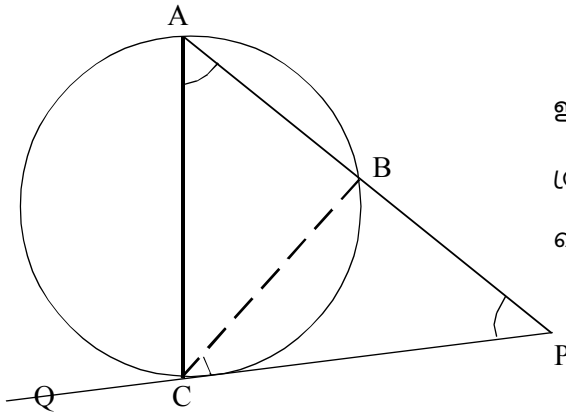
(i)



ചിത്രത്തിൽ Cയിലെ തൊടുവരയാണ് PQ

$\angle PCB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ ഇവ എത്ര?

(ii)



ഈ ചിത്രത്തിൽ $\triangle PCA$, $\triangle PBC$ ഇവ സമശീർഷ

ത്രികോണങ്ങളാണെന്നും $PA \times PB = PC^2$ എന്നും

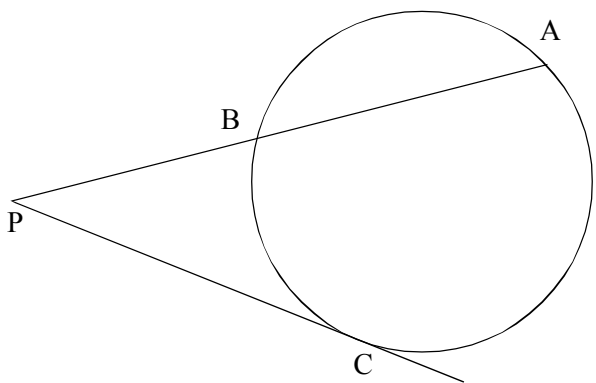
തെളിയിക്കാമല്ലോ.

(i)

ചിത്രത്തിൽ C യിലെ തൊടുവരയാണ് PC

PB= 16 സെമി, AB= 9 സെമി

ആയാൽ PC എത്ര?



പ്രവർത്തനം 10

3 സെമി ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഒരു കോൺ 40° ആയ ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം, വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന രീതിയിൽ വരയ്ക്കുക.

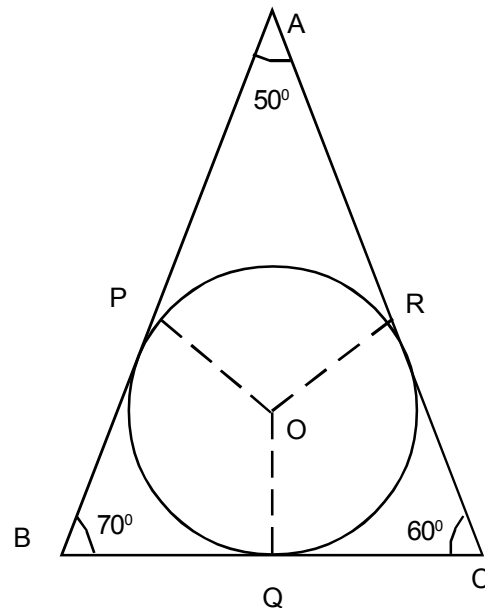
(സൂചന: വൃത്തം വരച്ച് 140° കോണിൽ ഖണ്ഡിക്കത്തക്കവിധം രണ്ട് വ്യാസം വരയ്ക്കുക. വ്യാസങ്ങളുടെ അറ്റത്തുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി തൊടുവരകൾ വരച്ചാൽ അവ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജം ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം ആയിരിക്കും.)

- വൃത്തത്തിന് ഏത് രണ്ട് വ്യാസങ്ങളുടെയും അറ്റങ്ങളിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ സമഭുജസാമാന്തരികം ഉണ്ടാക്കുന്നു. വ്യാസങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായാലോ?

പ്രവർത്തനം 11

2 സെമി ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വശങ്ങൾ ഈ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളായും കോണുകൾ 50° , 60° , 70° ആയും വരുന്ന ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രവും P,Q,R ഇവ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളുമാണെങ്കിൽ
 $\angle POR = 130^\circ$ $\angle QOR = 120^\circ$
 $\angle POQ = 110^\circ$ ആയിരിക്കുമെന്നറിയാമല്ലോ.



(സൂചന: വൃത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ 130° , 120° , 110° കോൺ ആകത്തക്കവിധം മൂന്ന് ആരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ആരങ്ങളുടെ അറ്റത്തുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേർത്ത് കിട്ടുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 50° , 60° , 70° ആയിരിക്കും.)

കൂടാതെ AO, BO, CO ഇവ യഥാക്രമം $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ഇവയുടെ സമഭാജികൾ ആയിരിക്കും. വൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തമാകുന്നു.

- ഇവിടെ വൃത്തം വരച്ച്, വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകൾ ആകത്തക്കവിധം ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്തത്. ആദ്യം ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവ്യാസം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങിനെയെന്ന് നോക്കാം.

വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് തൊടുവരകൾ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ വൃത്തകേന്ദ്രം ഉൾപ്പെടുമല്ലോ? അതുകൊണ്ട് ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് കോണുകളുടെയും സമഭാജികൾ ഖണ്ഡിക്കുന്നത് അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലായിരിക്കും.

1. വശങ്ങളുടെ നീളം 5.5 സെമി, 7 സെമി, 8 സെമി ആയ ത്രികോണം വരച്ച് അന്തർവ്യാസം നിർമ്മിക്കുക.
2. $AB = 6$, സെമി, $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, ആയ ത്രികോണം വരച്ച് അന്തർവൃത്തം നിർമ്മിക്കുക

സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തവും പരിവൃത്തവും

ചിത്രത്തിൽ സമഭുജത്രികോണം ABCയുടെ

പരിവൃത്തകേന്ദ്രമാണ് O എന്നിരിക്കട്ടെ.

OD, OE, OF, ഇവ യഥാക്രമം BC, AC, AB

എന്നീ വശങ്ങൾക്ക്

ലംബമാണ്

$OD=OE=OF$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

$BD=BF$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

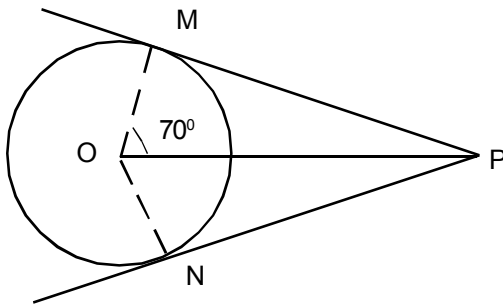
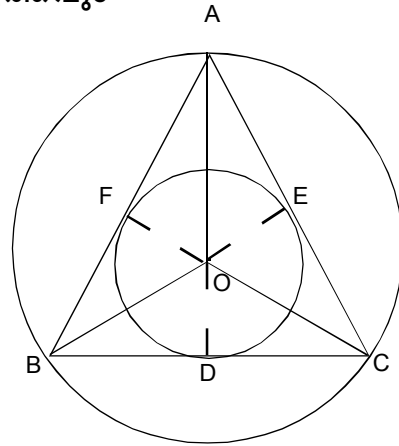
$\therefore \triangle OBD \cong \triangle OBF$

$\square B$ യുടെ സമഭാജിയാണ് BO

അതുപോലെ $\square C$ യുടെ സമഭാജിയാണ് CO എന്നും $\square A$ യുടെ സമഭാജിയാണ് AO എന്നും കാണാം.

$\therefore O$ എന്ന ബിന്ദു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തകേന്ദ്രമായിരിക്കും.

ചിത്രത്തിൽ OB അന്തർവൃത്തആരവും OB പരിവൃത്തആരവുമാണ്. $\triangle OBD$ യുടെ കോണളവുകൾ $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ആയതുകൊണ്ട് $OB=2 \times OD$ അതായത് അന്തർവൃത്ത ആരത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങാണ് പരിവൃത്ത ആരം. മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ പരിവൃത്തആരവും അന്തർവൃത്തആരവും തമ്മിലുള്ള അംശ ബന്ധം 2: 1 ആയിരിക്കും.

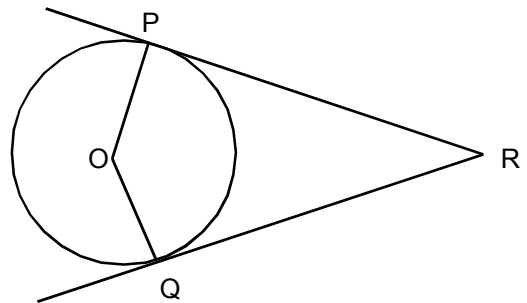


O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് തൊടുവരകളാണ് MP, NP എന്നിവ.

$\square MOP=70^\circ$ ആയാൽ $\square MPO$,

$\square NOP$, $\square MPN$ എന്നിവ കാണുക.

O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ P,Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ Rൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. OR എന്ന രേഖ $\square PRQ$ യെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇതിനായി തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾക്കുള്ള കാരണങ്ങൾ എഴുതുക.



1. $\triangle POR$, $\triangle QOR$ ഇവയിൽ

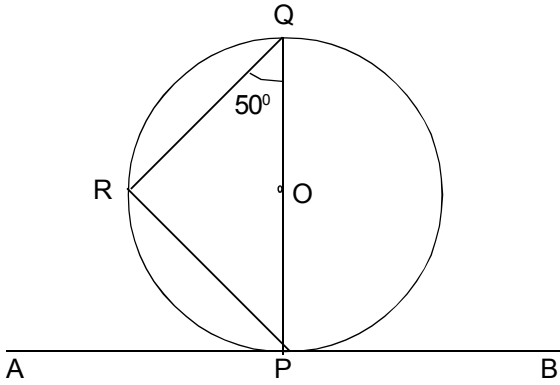
$OP=OQ$ (.....)

2. $OR=OR$ (.....)

3. $PR=QR$ (.....)

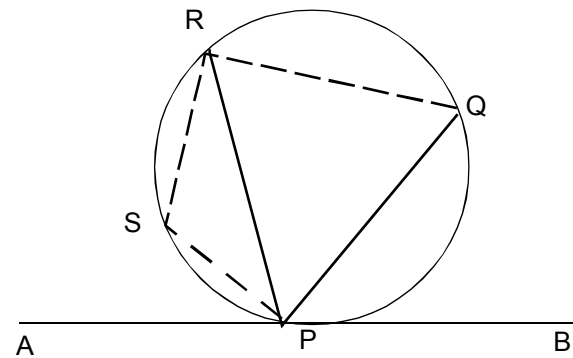
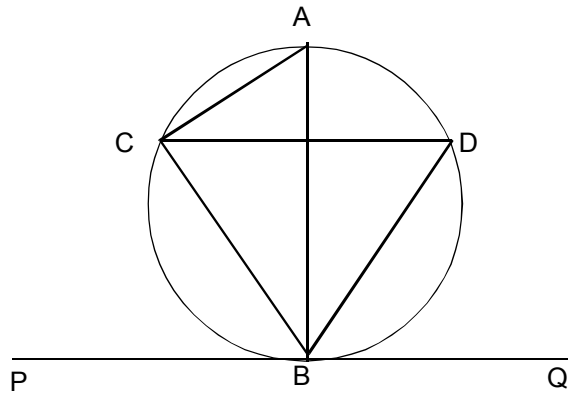
4. $\triangle RPO \cong \triangle RQO$ (.....)

5. $\square PRO = \square QRO$ (.....)



ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തത്തിലെ Pയിലെ തൊടുവരയാണ്. PQ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും $\angle PQR = 50^\circ$ യും ആണെങ്കിൽ $\angle QPR$ എത്ര? $\angle APR$ എത്ര?

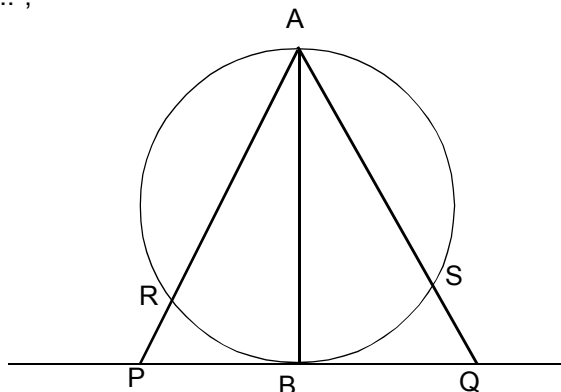
ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും PQ തൊടുവരയുമാണ്. $\angle BDC = 40^\circ$ എങ്കിൽ $\angle BAC$ എത്ര? $\angle PBC$ എത്ര?



ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തത്തിൽ P യിലെ തൊടുവരയാണ്. $PQ = PR$ ഉം $\angle QPR = 50^\circ$ യും ആണെങ്കിൽ.

$\angle PRQ = \dots\dots\dots$, $\angle PQR = \dots\dots\dots$, $\angle APR = \dots\dots\dots$
 $\angle BPQ = \dots\dots\dots$, $\angle PSR = \dots\dots\dots$,
 $\angle SPR + \angle SRP = \dots\dots\dots$

ചിത്രത്തിൽ $AP \times AR = AQ \times AS$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. വൃത്തത്തിലെ B എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ് . PQ കൂടാതെ AB വ്യാസവും.
 (സൂചന: $AP \times AR = AB^2$ എന്നും $AQ \times AS = AB^2$ എന്നും തെളിയിക്കാമല്ലോ)



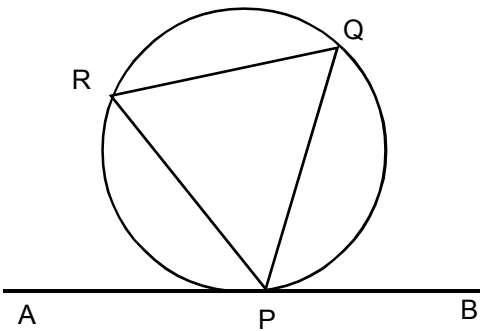
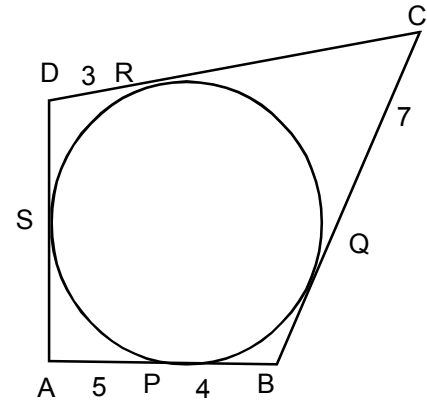
ചിത്രത്തിൽ ചതുർഭുജം ABCD യെ അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം P,Q,R,S എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. $AP=5$, $PB=4$, $QC=7$, $DR=3$ എങ്കിൽ

$BQ = \dots\dots\dots$ $CR = \dots\dots\dots$ $DS = \dots\dots\dots$

$AS = \dots\dots\dots$ $AB = \dots\dots\dots$ $BC = \dots\dots\dots$

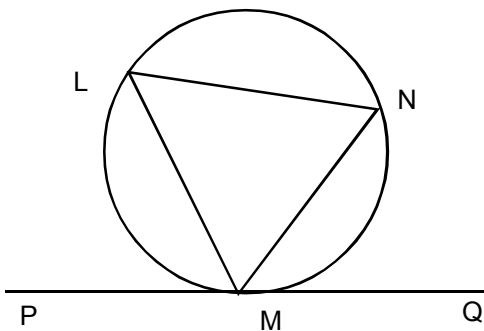
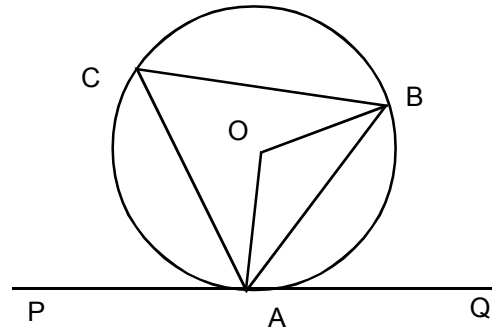
$CD = \dots\dots\dots$ $AD = \dots\dots\dots$

$AB+CD = \dots\dots\dots$ $BC+AD = \dots\dots\dots$

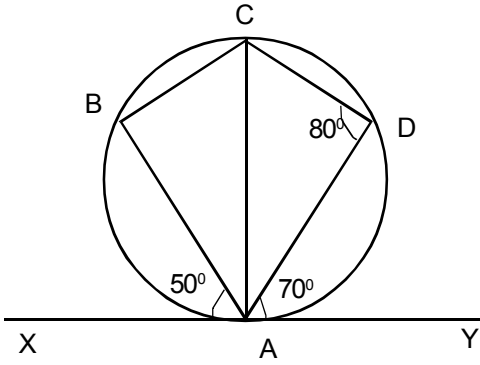


ചിത്രത്തിൽ AB എന്ന രേഖ വൃത്തത്തെ Pയിൽ തൊടുന്നു. $\angle APR = 70^\circ$, $\angle BPQ = 80^\circ$ ആയാൽ $\triangle PQR$ ന്റെ കോണളവുകൾ എഴുതുക.

ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം. A യിൽ കുടിയുള്ള തൊടുവരയാണ് PQ. $\angle BAQ = 65^\circ$ ആകുന്നു. $\angle OAQ$, $\angle ACB$ ഇവ കാണുക.

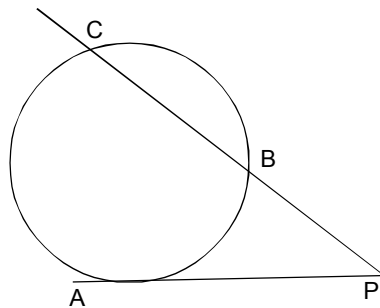
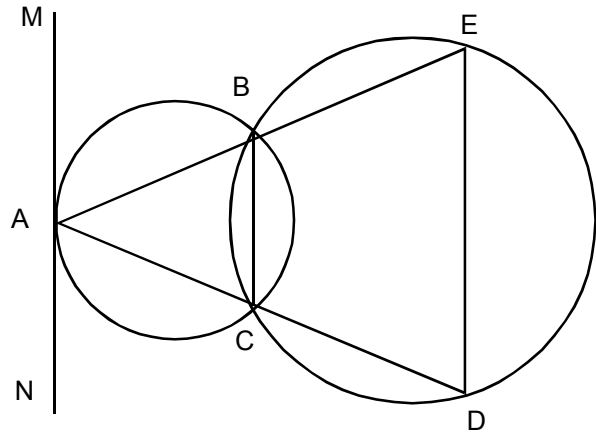


ചിത്രത്തിൽ PQ എന്ന രേഖ വൃത്തത്തെ Mൽ തൊടുന്നു. $LM=MN$ ആയാൽ $LN \parallel PQ$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.



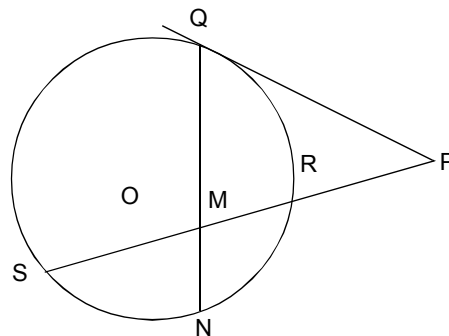
ചിത്രത്തിൽ XY എന്ന രേഖ വൃത്തത്തെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്നു. ചതുർഭുജം ABCD യുടെ എല്ലാ കോണുകളുടെയും അളവ് കണക്കാക്കുക.

ചിത്രത്തിൽ MN എന്ന രേഖ വൃത്തത്തെ A യിൽ തൊടുന്നു. $\angle CAN = 40^\circ$ ആയാൽ
 1) $\angle ABC$, $\angle CBE$, $\angle CDE$ ഇവകാണുക.
 2) $MN \parallel DE$ എന്നു തെളിയിക്കുക.



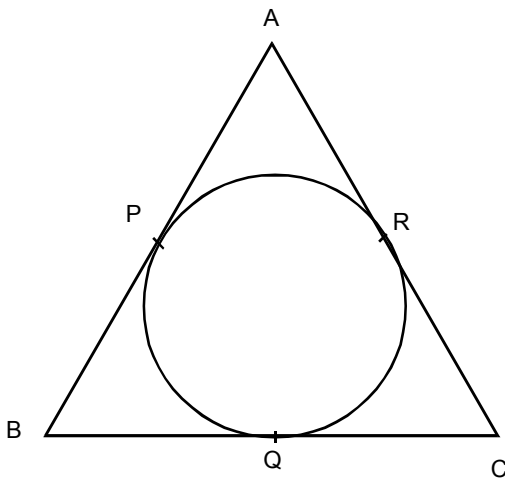
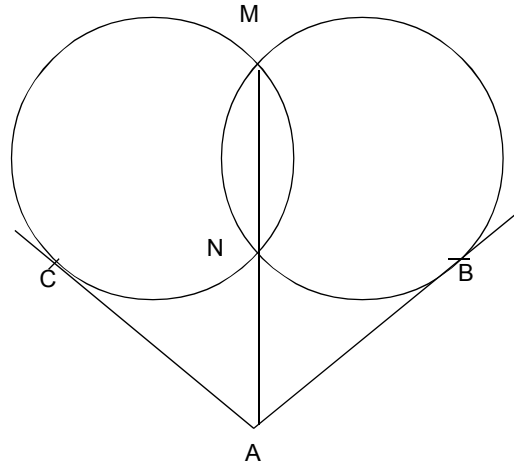
ചിത്രത്തിൽ PA എന്ന വര വൃത്തത്തെ A യിൽ തൊടുന്നു. $CB = 4\text{cm}$, $PB = 1\text{cm}$ ആയാൽ PA എത്ര?

ചിത്രത്തിൽ PQ തൊടുവരയാണ്.
 $PQ = PM = MN$ ആകുന്നു.
 $PR = 1\text{cm}$, $RS = 8\text{cm}$ ആയാൽ
 1) PQ എത്ര?
 2) MR എത്ര?
 3) QM എത്ര?



രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ M,N എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. MN എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുവാണ് A. AB, AC ഇവ തൊടുവരകളാണ്.

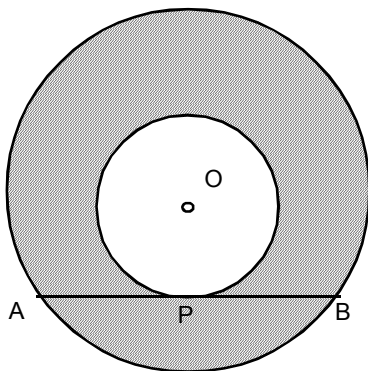
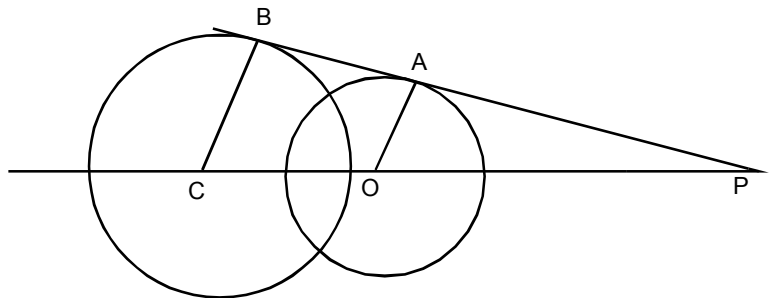
AB=AC എന്നു തെളിയിക്കുക.



ചിത്രത്തിൽ AB, BC, AC എന്നീ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ യഥാക്രമം P,Q,R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. $BC=11\text{cm}$, $AP=4\text{cm}$, ആയാൽ AR എത്ര?

$\triangle ABC$ യുടെ ചുറ്റളവെത്ര?

ചിത്രത്തിൽ O,C ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായ വൃത്തങ്ങളിൽ AB ഇവ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിലും തൊടുന്ന വരയാണ്. $AB=10\text{cm}$, $PB=20\text{cm}$, $OA=5\text{cm}$, ആയാൽ BC എത്ര?



ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് വൃത്തങ്ങളുടെയും കേന്ദ്രം O ആണ്. വലിയ വൃത്തത്തിലെ AB എന്ന ഞാൺ ചെറിയ വൃത്തത്തെ P യിൽ തൊടുന്നു. $AB=5\text{cm}$

- 1) ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്ര?
- 2) AB യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് P എന്ന് തെളിയിക്കുക.

അധ്യായം 9 ബഹുപദങ്ങൾ

ആമുഖം

ബീജഗണിത പഠനത്തിന്റെ ഭാഗമായി ബഹുപദങ്ങൾ എന്ന ആശയം ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ അവതരിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെ തുടർച്ചയാണ് ഈ അധ്യായം. സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുക എന്ന പ്രായോഗിക പ്രശ്നത്തിന്റെ ഭാഗമായാണ് ബഹുപദങ്ങളുടെ പഠനം ആഭിർവ്വദിച്ചത് എന്ന് പൊതുവെ പറയാം. സംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകളും ക്രിയകളും അവയ്ക്ക് അടിസ്ഥാനമായ ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ് രൂപം കൊണ്ടത്. ഇവയുടെ ഗണിതപരമായ വ്യാഖ്യാനത്തിലൂടെ ബഹുപദങ്ങളുടെ പഠനത്തിലേക്കും ഇവ വ്യാപിക്കുന്നു. ഒരു സംഖ്യ മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ ഘടകമാകുന്ന സന്ദർഭത്തിൽ നിന്ന് ബഹുപദം മറ്റൊരു ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാകുന്ന സന്ദർഭം ചർച്ചചെയ്യുന്നു. ഇത് ശിഷ്ടാസിദ്ധാന്തത്തിലേക്കും ഘടകസിദ്ധാന്തത്തിലേക്കും നയിക്കുന്നു. ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടു പിടിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം ബഹുപദസമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുന്ന ക്രിയയായി മാറുന്നതും പ്രത്യേക ശ്രദ്ധ അർഹിക്കുന്നു. കൂടാതെ സമവാക്യ പരിഹാരത്തിന് ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകക്രിയ സഹായകമാവുന്നതായും കാണാം. രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങൾ എന്ന അധ്യായവും ഈ അധ്യായവും പരസ്പര പൂരകങ്ങളായി വർത്തിക്കുന്നുണ്ട്.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- സംഖ്യകളുടെ ഘടകം എന്ന ആശയത്തിലൂടെ ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകം എന്ന ആശയം.
- ബഹുപദങ്ങളുടെ ഹരണത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കാൻ ഹരണ ഫലം പ്രസക്തമല്ല.
- ശിഷ്ടാസിദ്ധാന്തം
- ഘടക സിദ്ധാന്തം
- ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകക്രിയ
- സമവാക്യ പരിഹാരത്തിലൂടെ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകക്രിയ
- ഘടകക്രിയയിൽ നിന്ന് സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം

പഠനപ്രവർത്തനങ്ങൾ

കോളം Aയിലെ സമവാക്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി കോളം B യിലെ സംഖ്യയുടെ ഘടകമാണോ കോളം Cയിലെ സംഖ്യ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

Set I

A	B	C
$6=3 \times 2$	6	3
$10=5 \times 2$	10	5
$21=5 \times 4 + 1$	21	4
$-15 = -3 \times 5$	-15	-3
$26 = -2 \times -13$	26	-2
$-100 = -25 \times 4$	-100	4
$-38 = -5 \times 8 + 2$	-38	-5

p, a, b എന്നിവ പൂർണ്ണ സംഖ്യകളാവുകയും $P = a \times b$ ആവുകയും ചെയ്താൽ P യുടെ ഘടകങ്ങളാണ് a, b

Set 2

A	B	C
$48 \div 6 = 8$	48	6
$-175 \div 7 = -25$	-175	7
$376 \div 4 = 94$	376	4
$-100 \div 2 = -50$	-100	2

P, a, b എന്നിവ പൂർണ്ണ സംഖ്യകളാവുകയും $P \div a = b$ ആവുകയും ചെയ്താൽ P യുടെ ഘടകങ്ങളാണ് a, b

Set 3

A	B	C
$6 = 12 \times \frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
$-15 = -45 \times \frac{1}{3}$	-15	$\frac{1}{3}$
$\frac{8}{15} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{5}$
$8 = \frac{24}{5} \times \frac{5}{3}$	8	$\frac{5}{3}$
$-2 = -\frac{10}{7} \times \frac{7}{5}$	-2	$\frac{7}{5}$

ഭിന്നസംഖ്യകൾ മൊത്തത്തിൽ പരിഗണിച്ചാൽ ഘടകം എന്ന ആശയത്തിന് പ്രസക്തി ഇല്ല.

ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകങ്ങൾ

പഠന പ്രവർത്തനങ്ങൾ

കോളം Aയിലെ സമവാക്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി കോളം Bയിലെ ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ കോളം Cയിലെ ബഹുപദം എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

Set 1

A	B	C
$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$	$x^2 - 1$	$x - 1$
$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$	$x^2 - 4$	$x + 2$
$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$	$x^2 - 5x + 6$	$x - 3$
$x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$	$x^2 + 7x + 10$	$x + 5$
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$x - 2$
$x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$	$x^2 - 2x - 1$	$x - 1 - \sqrt{2}$

Set 2

A	B	C
$x^2-1=(x+1)(x-1)+2$	x^2+1	$X-1$
$x^2+1=(x+1)(x^2-x+1)$	x^3+1	$X+1$
$2x^2+x+x=(x-1)(2x+3)+6$	xx^2+x+3	$2x+3$
$X^3-8x^2+7x+10=(x-3)(x^2-5x-8)-14$	$X^3-8x^2+7x+10$	$X-3$

Set 3

A	B	C
$x^2-1=1/2(2x+2)(x-1)$	x^2-1	$2X+2$
$x^2-4=2/3(3/2x+3/2)(x-4)$	x^2-4	$3/2x+3/2$
$x^2-5x+6=1/6(2x-4)(3x-9)$	x^2-5x+6	$3x+9$
$X^3-6x^2+11x-6=1/12(2x-2)(3x-6)(2x-6)$	$X^3-6x^2+11x-6$	$2x-6$

$P(x)$ എന്ന ബഹുപദം $q(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ ഏത് സംഖ്യ 'a' എടുത്താലും $aP(x)$ എന്ന ബഹുപദവും $q(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

പഠനപ്രവർത്തനങ്ങൾ

- $x^3-1=(x-1)(ax^2+bx+c)+d$ എങ്കിൽ a,b,c,d എന്നിവ കണ്ടുപിടിച്ച് x^3-1 ന്റെ ഘടകമാണോ $x-1$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
- $x^3+1=(x+1)(ax^2+bx+c)+d$ എങ്കിൽ a,b,c,d എന്നിവ കണ്ടുപിടിച്ച് x^3+1 ന്റെ ഘടകമാണോ $x+1$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

ഹരണക്രിയയിൽ ശിഷ്ടം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ ഹാര്യമായ ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് ഹാരകമായ ബഹുപദം.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

- $x-1, x^3+1$
- $x+2, x^2+5x+8$
- $x-1, x^3-1$
- $x-2, x^2+6x+8$
- $2x+1, 8x^3+1$
- $x-2, x^2+6x+10$
- $2x-1, 8x^3-1$
- $x-3, x^3-27$
- $x+2, x^2+3x+2$
- $x+3, x^3-27$

ഒന്നാം കൃതി ഘടകങ്ങൾ

പഠനപ്രവർത്തനങ്ങൾ

1. $x^3-5x^2+8x+3=(x-1)(ax^2+bx+c)+7$ എങ്കിൽ x^3-5x^2+8x+3 ന്റെ ഘടകമാണോ $(x-1)$?
 x^3-5x^2+8x+3 നെ $(x-1)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ശിഷ്ടം എത്ര?
2. $x^3+6x^2-8x+10=(x-1)(ax^2+bx+c)+d$ എങ്കിൽ d യുടെ വില കാണുക.
 $x^3+6x^2-8x+10$ നെ $(x-1)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ശിഷ്ടം എത്ര?
3. $x^3+4x^2-7x+6=(x-2)q(x)+r$ എങ്കിൽ x^3+4x^2-7x+6 നെ $(x-2)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ശിഷ്ടം എത്ര?

ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം

$P(x)=(x-a)q(x)+r$ എങ്കിൽ $P(a)=r$, $P(x)$ എന്ന പഹുപദത്തെ $(x-a)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $P(a)$ ആണ്.

4. $P(x)=(x-2)q(x)$ എങ്കിൽ $p(x)$ നെ $(x-2)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ശിഷ്ടം എത്ര? $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണോ $(x-2)$
5. $P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $P(3)=0$ എങ്കിൽ $P(x)$ നെ $(x-3)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ശിഷ്ടം എത്ര?
 $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണോ? $(x-3)$

ഘടകസിദ്ധാന്തം

$P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $P(a)=0$ ആണെങ്കിൽ $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ് $(x-a)$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. $(x+1), (x-1), (x+2), (x-2)$ എന്നിവ $3x^2+7x-4$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണോ പരിശോധിക്കുക.
2. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ ബഹുപദവും x^3+3x^2+2x-6 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണോ?
 $(x+1), (x-1), (x+3), (x-3)$
3. $(x+1), (x+2), (x+3), (x-3)$ എന്നിവ x^3+4x^2+x-6 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.
4. $x^{27}-1$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $x-1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
5. $x^{50}-x^{43}+x^{20}-x^{10}+7$ ൽ $x+1$ ഘടകമാണോ?
6. $(x+1)(2x+5)+4$ ന്റെ ഘടകമാണോ $x+1$ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.
7. $3x-1$ എന്ന പദം $3x^3-4x^2+2x-6$ ന്റെ ഘടകമാണോ?
8. $2x^3-8x^2-5x-25$ നെ $x-5$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കണ്ടെത്തി ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് $2x-10$ ഘടകമാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.
9. $(x+1), (x-1), (x+2)$ എന്നിവയിൽ ഏതെല്ലാം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകമാകുമെന്ന് കാണുക.
 $x^3+8x^2+8x-17$
 $2x^3-6x^2-8x+4$
 x^3-2x^2-5x-6
 $3x^2-2x-7$
 x^3-3x^2-x
10. x^3-5x^2+8x-1 നോട് ഏത് സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ $(x-1)$ ഘടകമായി വരുന്ന ബഹുപദം കിട്ടും.
11. $3x^2+x+8$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണോ $(3x+2)$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
12. $2x^3-5x^2+7x+8$ എന്ന ഒരു ബഹുപദത്തോട് ഏത് സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ $(2x-1)$ എന്ന ബഹുപദം ഘടകമാകും.
13. x^2-5x+8 എന്ന ബഹുപദത്തോട് ഏത് സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ $(x-3)$ ഇതിന്റെ ഘടകമാകും.
14. $2x^2-kx^2+8x-3$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 0 ആയാൽ K എത്രയായിരിക്കും.
15. $2x^2+kx+6$ ൽ $P(-1)=0$ ആയാൽ k എത്ര? ഈ ബഹുപദത്തിന്റെ രണ്ട് ഘടകങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

- $x^3 - 3x^2 + 8x + k$ എന്ന പദത്തിൽ ഒരു $x-2$ ഘടകമായാൽ k യുടെ വില എന്തായിരിക്കും.
- $P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $(x^2 - a^2)$. എങ്കിൽ $P(a)=0$ എന്നും $P(-a)=0$ എന്നും തെളിയിക്കുക.
- $ax^3 + bx^2 + cx + d$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $x+2$ ഒരു ഘടകമായാൽ $8a+2c=4b+d$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
- $x^2 + ax + b = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം 5, -8 എന്നിവയാണ്. എങ്കിൽ $x^2 + ax + b$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഒന്നാം കൃതിയിലുള്ള രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.
- $x^3 + px^2 + qx - 6$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ രണ്ട് ഘടകങ്ങൾ $(x+1)$, $(x-3)$, എന്നിവയായാൽ p, q എന്നിവയുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്തുക.
- $2x^3 + px^2 + qx - 20$ ന്റെ രണ്ടു ഘടകങ്ങൾ $(x+2)$, $x-2$ ആയാൽ p, q ഇവയുടെ വിലകൾ എന്തായിരിക്കണം.
- $P(x) = 2x^2 - 7x + 4$ ൽ $P(3)$ കാണുക.
 $Q(x) = x^3 + 8x^2 - 15x - 51$ ൽ $Q(3)$ കാണുക.
 $R(x) = P(x) + Q(x)$ എങ്കിൽ $R(x)$ ന്റെ ഘടകമാണോ $x-3$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
- $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ൽ $p(1) = p(-1)$ ആയാൽ $a+c=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
- $12x^2 - 10x + 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം $1/3, 1/2$ ഇവയായാൽ $12x^2 - 10x + 2$ ന്റെ ഘടകരൂപം എഴുതുക.
- $x^3 + 5x^2 + bx - 8$ ന്റെ ഒരു ഘടകം $x+1$ ആയാൽ b എത്ര? ഈ ബഹുപദത്തിൽ $x-1$ ഒരു ഘടകമാണോ?
- $ax^2 + bx^2 + cx + d$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഒരു ഘടകം $x+1$ ആയാൽ $a+c=b+d$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഘടകക്രിയ

പഠനപ്രവർത്തനം

$x^2 + 2x - 15$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ.

$P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $P(a)=0$ എങ്കിൽ $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണല്ലോ $(x-a)$

അതായത്, $P(x)$ ന്റെ ഘടകം കാണുന്നതിന് $P(x) = 0$ ആകുന്ന x ന്റെ വിലകൾ കണ്ടെത്തിയാൽ മതിയല്ലോ?

$x^2 + 2x - 15$ ന്റെ ഘടകങ്ങൾ കാണുന്നതിന് $x^2 + 2x - 15 = 0$ ആകുന്ന x വിലകൾ കണ്ടെത്തണം. (സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം) ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം 3 അല്ലെങ്കിൽ -5 ആണ്.

$$P(3)=0; P(-5)=0$$

അതുകൊണ്ട് $x^2 + 2x - 15$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. $(x-3), (x+5)$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ബഹുപദത്തെയും ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| • $x^2 - 3x - 28$ | • $6x^2 - 11x + 3$ |
| • $x^2 - x - 6$ | • $x^2 - 2x - 2$ |
| • $x^2 + 5x - 14$ | • $x^2 - 4x + 1$ |

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

പുരിപ്പിക്കുക

$$x^2+9x+20 = (x+5)(x+4)$$

$$x^2+13x+30 = \dots\dots\dots$$

$$x^2+7x+10 = \dots\dots\dots$$

$$x^2+20x+36 = \dots\dots\dots$$

$$x^2+15x+50 = \dots\dots\dots$$

$$x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$$

$$x^2-3x+2 = \dots\dots\dots$$

$$x^2-8x+15 = \dots\dots\dots$$

$$x^2-20x+75 = \dots\dots\dots$$

$$x^2-10x+21 = \dots\dots\dots$$

$$x^2+4x-5 = (x+5)(x-1)$$

$$x^2 + 7x - 30 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 + x - 30 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 + 2x - 48 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 + 10x - 11 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$$

$$x^2 - x - 12 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 - 5x - 14 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 - 3x - 70 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 - 7x - 18 = \dots\dots\dots$$

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കി പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

eg. $x^2+9x+20 = 0$

$$(x+5)(x+4)=0$$

$$\therefore X+5=0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x+4=0$$

$$\therefore x = -5 \text{ } x=-4$$

പരിഹാരം **-5 or -4**

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

ഘടകങ്ങൾ കണ്ടെത്തി പരിഹാരം കാണുക.

$$x^2-7x-18=0$$

$$x^2+13x-30=0$$

$$x^2-3x-70=0$$

$$x^2+7x+10=0$$

$$x^2-5x-14=0$$

$$x^2-10x-11=0$$

$$x^2-10x-11=0$$

$$x^2+20x+36=0$$

$$x^2-8x+15=0$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$x^2-4x-12=0$$

$$x^2+15x+50=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x^2+7x-30=0$$

$$x^2-x-12=0$$

$$x^2-8x+15=0$$

$$x^2+x-30=0$$

$$x^2-20x+75=0$$

$$x^2+2x-48=0$$

പ്രോജക്ട്

$x-1$, $x+1$, x^2-1 ഇവയിലേതെങ്കിലും ഘടകങ്ങളായി വരുന്ന ബഹുപദങ്ങളിലെ ഗുണകങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ വെച്ചേറെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

സൂചന: $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+e-x+f$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ

$x-1$ ഘടകമാണെങ്കിൽ

$a+b+c+d+e+f=0$ ആയിരിക്കണം.

$x+1$ ഘടകമാകണമെങ്കിൽ

$a+c+e = b+d+f$ ആകണം.

x^2-1 ഘടകമാകണമെങ്കിൽ

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

ഇതിൽ $x+1$ ന്റെയും $x-1$ ന്റെയും പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

$$\therefore a+c+e = b+d+f=0$$

$$\therefore 2(b+d+f) = 0 \text{ ആയിരിക്കും.}$$

ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

ആമുഖം

പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് രേഖകളും യുക്തമായ ഒരു ഏകകവും എടുത്ത് തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാജോഡി കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ. സൂചകാക്ഷങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുന്നത് സൂചകസംഖ്യകൾ എന്ന അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്തല്ലോ! ഇതിന്റെ തുടർച്ചയാണ് ഈ പാഠഭാഗം. ഇവിടെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുകയും ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ചില ജ്യാമതീയ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ബീജഗണിതത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ പരിഹാരം കാണുകയുമാണ് ചെയ്യുന്നത്.

നീളത്തെയും ഭാരത്തെയും മറ്റും സംഖ്യകളാക്കിയാൽ പോലെ ഒരു വരയുടെ ചെരിവിനെയും സംഖ്യ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാമെന്ന് ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യുന്നു. ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ പരസ്പര ബന്ധത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വരയുടെ സമവാക്യം രൂപീകരണവും ഇവിടെ നടത്തുന്നുണ്ട്.

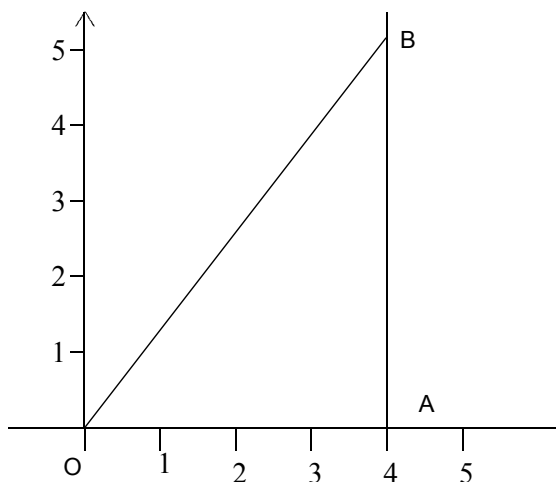
തുടർന്നുള്ള (ഉയർന്ന) ക്ലാസുകളിൽ ചർച്ചചെയ്യപ്പെടുന്ന മറ്റ് വക്രരേഖകളുടെ സമവാക്യങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിന്റെ തുടക്കമെന്ന രീതിയിലാണ് ഇവിടെ വരയുടെ സമവാക്യം ചർച്ചചെയ്യുന്നത്.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

1. ഒരു ബിന്ദുവും ആധാര ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം.
2. രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം
3. വരയുടെ ചരിവ് എന്ന ആശയം
4. വരയുടെ സമവാക്യം എന്ന ആശയം.

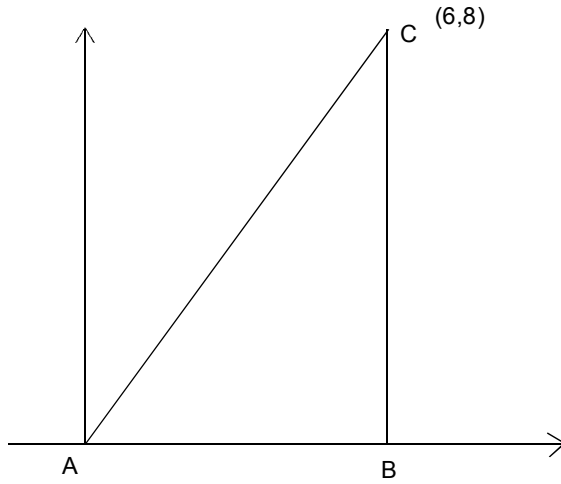
വർക്ക്ഷീറ്റ്

1.



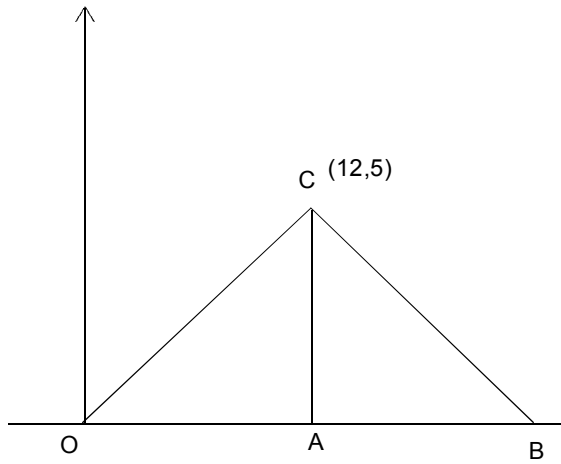
OA, AB, OB ഇവ കാണുക.
B യുടെ സംഖ്യാജോഡി എഴുതുക

2.



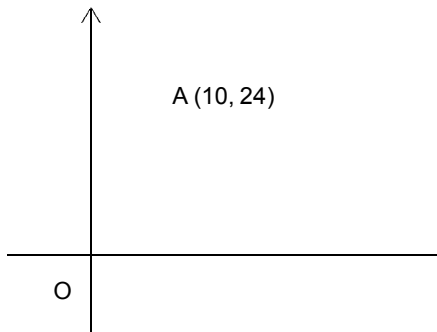
AB, BC, AC ഇവ എത്ര.
B യുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ
എഴുതുക

3



OC= CB ആയാൽ
OA, AC, OC ഇവ കാണുക.
OB എത്ര? Bയുടെ സംഖ്യാജോഡി
എഴുതുക

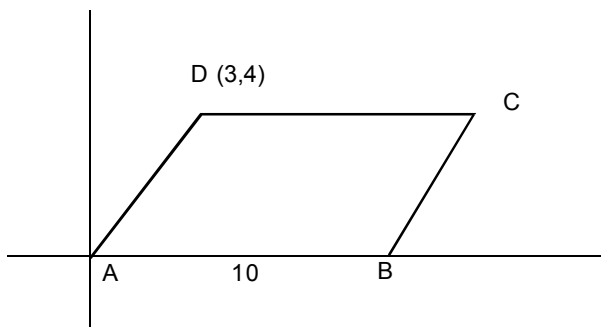
4



OA എത്ര?

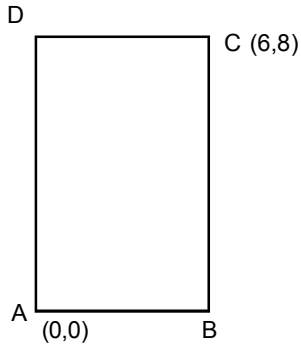
5. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് (10,14) ലേക്കുള്ള അകലമെന്ത്?

6.



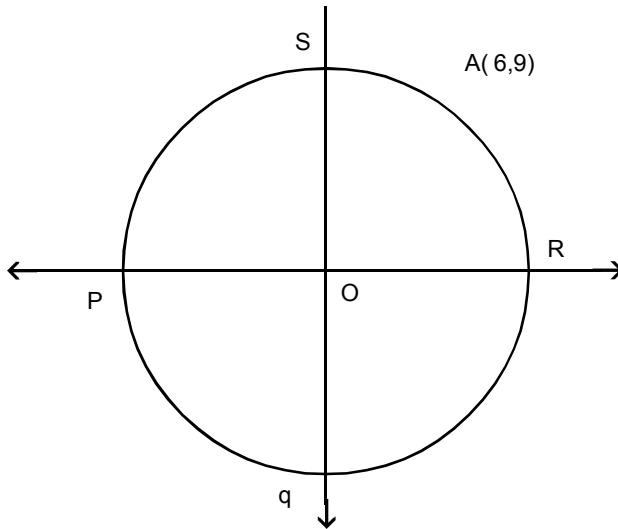
സാമാന്തരികം A,B,C,D യിൽ C യുടെ
സംഖ്യാജോഡി എഴുതുക.
സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ
അളവ് എഴുതുക. AC യുടെ നീളമെന്ത്?

7



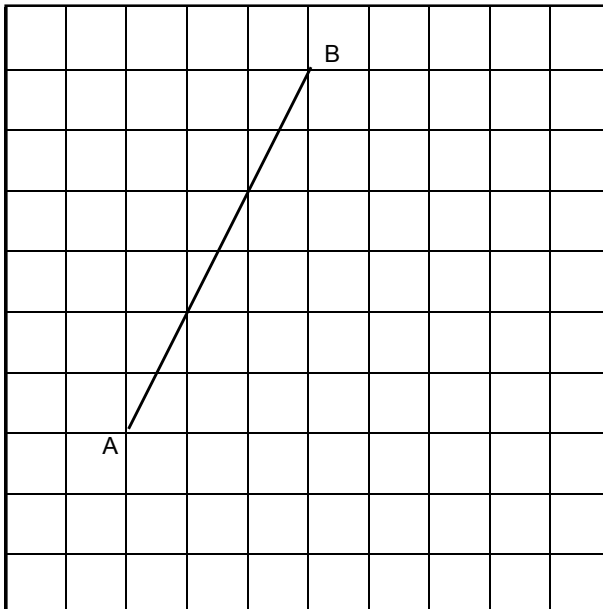
ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക. B,D, ഇവയുടെ സംഖ്യാ ജോഡി എഴുതുക.

8.



വൃത്തത്തിന്റെ ആരമെന്ത്? വൃത്തം സൂചകരൂപങ്ങളെ വെണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

പ്രവർത്തനം



- ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ A,B എന്ന വര വരയ്ക്കുക. അരികിലുള്ള വരകൾ സൂചകരൂപങ്ങളായി എടുക്കുക. AB വികർണ്ണമായി ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം. ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാകണം. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക. വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളവും കാണുക.

- A, B ഇവയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കാണുക. സൂചക സംഖ്യകളും ഇപ്പോൾ കണ്ടെത്തിയ നീളങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തി അവതരിപ്പിക്കുക.

വർക്ക് ഷീറ്റ്

1. ചതുരം A, B, C, D യുടെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. A (2,3), C (8,11) ചതുരത്തിന്റെ മറ്റ് മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കാണുക. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക. ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളമെന്ത്?
2. ഒരു തലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളാണ് P യും Q ഉം. P(2,-3), Q(5,-7) PQ വികർണമായി, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി ചതുരം വരയ്ക്കുക. ചതുരത്തിന്റെ മറ്റ് മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക. ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണുക.
3. ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് A(2,4), B(5,10). ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് A യിലേക്കും, B യിലേക്കും ഉള്ള ദൂരം കാണുക. AB എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലമെന്ത്?
4. സാമാന്തരികം A, B, C, D യിൽ A (2,4), B (10,4), D (5,8) C യുടെ സൂചക സംഖ്യ കാണുക. സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കാണുക.
5. A (2,5) B (4,9) C (7,15). A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ നേർരേഖയിലാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

വരയുടെ ചരിവ്

x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരങ്ങളായ വരകളെ കുറിച്ചും y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരങ്ങളായ വരകളെ കുറിച്ചുമുള്ള ചില വസ്തുതകൾ സൂചക സംഖ്യകൾ എന്ന പാഠഭാഗത്ത് ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു സ്ഥിര ബന്ധം കണ്ടെത്തുന്നു. ഈ ബന്ധത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വരയുടെ ചരിവിനെ ഒരു സംഖ്യകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അതിനായി കൂട്ടി ആദ്യം തിരിച്ചറിയേണ്ട വസ്തുത വരകളുടെ ചരിവ്, എന്ന ആശയമാണ്. ചരിവ് കൂടുതലുള്ള വര, ചരിവ് കുറഞ്ഞ വര എന്ന് പറയുന്നത്. എന്തിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് ഇവിടെ ഒരു വര x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വരയുടെ ചരിവിനെ കുറിച്ചു പറയുന്നു. ചരിവ് എന്ന ആശയം എന്തിക്കുവാൻ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രവർത്തനം നൽകാവുന്നതാണ്.

പ്രവർത്തനം

ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ x, y അക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് A (1,1) B (4,4) P (1,2) Q (3,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കുക. AB എന്ന വര ഇരു വശങ്ങളിലേക്കും നീട്ടി വരയ്ക്കുക. ഇതുപോലെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ച് നീട്ടി വരയ്ക്കുക. ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന രണ്ട് വരകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ കുട്ടിൾ ചർച്ച ചെയ്യട്ടെ. ഈ വരകളിലെ ഏതാനും ചില ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തി എഴുതുവാൻ പറയുക. ഇതിൽ ഒരു വര x അക്ഷത്തോട് അടുത്തു കിടക്കുന്നു എന്നും മറ്റേത് x അക്ഷത്തിൽ നിന്നും കുറച്ചുകൂടി അകലത്തിലാണെന്നും കാണട്ടെ. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒന്നാമത്തെ വര x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിനെക്കാൾ വലുതാണ്. രണ്ടാമത്തെ വര x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ഇതിനെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം. ഒന്നാമത്തെ വരയേക്കാൾ ചരിവ് കൂടുതലാണ്. രണ്ടാമത്തെ വരയ്ക്ക്. ഇങ്ങനെ വരയ്ക്ക് ഒരു ചരിവ് ഉണ്ട് എന്ന് തിരിച്ചറിവിലൂടെ അളന്ന് എഴുതുന്ന രീതി പാഠപുസ്തകത്തിലെ പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ കുട്ടിയിൽ എത്തിക്കാം.

വർക്ക് ഷീറ്റ്

1. (2,5), (5,11) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്രയാണ്?
2. (3,9) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര അക്ഷത്തിലെ (-4,0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. വരയുടെ ചരിവ് എത്രയാണ്.
3. (1,7) (3,5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എന്താണ്. ഈ വര y അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ എന്ത്?

- (2,8), (4,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര (7,3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.
- (3,7), (4,9), (5,11) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.
- A (1,3), B (2,6), C(4,8) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.
- (2,7), (5,13), (3,12) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കാൻ സാധിക്കും എന്ന് സമർത്ഥിക്കുക.
- (2,0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ, ചരിവ് $1/4$ ആയി വരുന്ന വരയിലെ മറ്റ് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ എഴുതുക.
- (2,4), (5,10) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും (1,3) (4,12) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ വ്യത്യസ്തമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.
- (1,5), (3,15) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും (2,3), (3,12) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും സമാന്തരങ്ങളല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

വരയുടെ സമവാക്യം

ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ x, y സൂചക സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ പരസ്പരം എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. എന്നാണ് ഒരു വരയുടെ സമവാക്യത്തിലൂടെ കാണിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെയെല്ലാം y സൂചകസംഖ്യകൾ x സൂചകസംഖ്യകളുടെ രണ്ട് മടങ്ങാണെങ്കിൽ, ഈ വരയുടെ സമവാക്യം $y=2x$ എന്ന് പറയുന്നു. മറിച്ച് ഒരു വരയുടെ സമവാക്യം $y=3x+1$ എങ്കിൽ, ഈ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ x സൂചകസംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങിനോട് 1 കൂട്ടിയതാണ് y സൂചകസംഖ്യ. പാഠപുസ്തകത്തിലെ പ്രർത്തനം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ ഈ രണ്ട് വസ്തുതകളും കൂട്ടിയിൽ ഉറപ്പിക്കേണ്ടതാണ്. കൂടാതെ ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സംഖ്യാജോഡികളുടെ കൂട്ടവും, വരയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോഡി കൂട്ടവും ഒന്നു തന്നെയാണെന്നും കൂടി തിരിച്ചറിയണം.

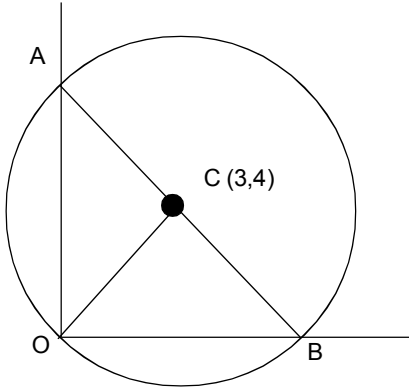
വർക്ക് ഷീറ്റ്

- $2x+3y-10=0$, സമവാക്യമായ ഒരു വരയിലെ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $x-3y+6=0$ എന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാനോ (2,4)
- $3x-2y=6$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ് എന്താണ്
- $2x+5y-4=10$ എന്ന വര x അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു ഏത്?
- $y=2x$ എന്ന വര ആധാരാബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു എന്ന് സമർത്ഥിക്കുക.
- $2x+3y=10$ എന്ന വരയും $3x-2y=12$ എന്ന വരയും പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
- $3x-4y+5=0$ എന്ന വരയും, $3x-4y=10$ എന്ന വരയും സമാന്തരങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
- $2x+3y=6$ ഉം $4x-3y=10$ എന്ന വരയും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു ഏതാണ്.

UNIT TEST

1. $(6,8)$ എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായ വൃത്തം x അക്ഷത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം സ്പർശിക്കുന്നു. $(8,1)$ എന്ന ബിന്ദു ഈ വൃത്തത്തിന് പുറത്താണോ? അകത്താണോ?
2. $(3,1)$, $(1,3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ട് ശീർഷങ്ങളായാൽ പരപ്പളവ് എന്ത്?
3. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $(1,3)$, $(3,1)$ $(4,4)$ $(2,6)$ ഇവയായാൽ ചുറ്റളവ് കാണുക.

4.



$c(3,4)$ കേന്ദ്രമായി വരച്ച വൃത്തം ആധാര ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. ഈ വൃത്തം സൂചകാങ്കുഷങ്ങളെ വെണ്ഡിക്കുന്ന മറ്റ് ബിന്ദുക്കൾ കാണുക. A,B,C ഇവ ഒരു നേർവരയിലാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

സൂചന:

1. അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടകോൺ എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച്.
2. ദൂരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്
3. ചരിവ് ഉപയോഗിച്ച്
5. $5x + Y - 13 = 0$, $3X - 4Y + 6 = 0$ ഈ രേഖകൾക്ക് പൊതുവായ ബിന്ദു കാണുക.
6. $3X - 4Y + 6 = 0$, $4x + 3Y - 17 = 0$ എന്നീ രേഖകളുടെ പൊതുവായ ബിന്ദു കാണുക. ഇവ പരസ്പരം ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ആമുഖം

വിവരശേഖരണത്തിന്റെ ഭാഗമായി ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ വർഗ്ഗീകരിക്കാം. അവയെ വിഭാഗങ്ങളും ആവൃത്തികളുമായി പട്ടികപ്പെടുത്തി ലഭിച്ച വിവരങ്ങളെ വിശകലനം നടത്തുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങളാണ് സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് എന്ന അധ്യായത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. ഒരു പ്രദേശത്തെ ആളുകളുടെ പ്രായം, ആരോഗ്യസ്ഥിതി, സാമ്പത്തിക നിലവാരം, കുട്ടികളുടെ പഠനനിലവാരം, മറ്റ് സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകൾ എന്നിവ വിശകലനം ചെയ്യാൻ മാധ്യം, മധ്യമം, മഹിതം മുതലായ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാമെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ പരിചയപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. സാഹചര്യങ്ങൾ അനുസരിച്ച് ഭൗതിക പ്രശ്നങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യാൻ ഇത്തരം ശരാശരികൾ നമുക്ക് ഗുണപ്രദമാണ് ആവൃത്തി പട്ടികകളിൽ നിന്നും മാധ്യം, മധ്യമം എന്നിവ കണക്കാക്കുന്ന രീതിയാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ നിന്ന് മാധ്യം കണ്ടെത്തുന്നതിന്
- സഞ്ചിതാവൃത്തി
- ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ നിന്ന് മധ്യമം കണ്ടെത്തുന്നതിന്

ഒരു കുട്ടം സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം കാണാൻ അവയുടെ തുകയെ എണ്ണം കൊണ്ട് പരിഹരിച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

ജീവകാരുണ്യ പ്രവർത്തനത്തിന് സ്കൂളിലെ പത്ത് ഡിവിഷനുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ദിവസം സ്വരൂപിച്ച തുക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. തുകയുടെ മാധ്യം കാണുന്നതെങ്ങിനെ?

$$170, 170, 150, 200, 170, 180, 160, 180, 170, 200 \text{ ഓരോ ഡിവിഷനിൽ നിന്നും പിരിച്ചെടുത്ത ആകെ തുക} \\ = 150 + 16 + (4 \times 170) + (2 \times 180) + (2 \times 200) \\ = 1750$$

കുട്ടികളിൽ നിന്ന് പിരിച്ചെടുത്ത ശരാശരി തുക.

$$= \frac{1750}{10}$$

മാധ്യം 175 രൂപ.

പ്രവർത്തനം 1

ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ അഞ്ച് ഗ്രൂപ്പുകളായി തിരിച്ചുകൊണ്ട് പ്രവർത്തനം നൽകാവുന്നതാണ്.

group I ലെ കുട്ടികൾക്ക് അവരുടെ പൂർത്തിയായ വയസ്സിന്റെ മാധ്യം കാണൽ

group II ലെ കുട്ടികളുടെ ഭാരം (ഏകദേശം) കണ്ടെത്തി, ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

group III ലെ കുട്ടികൾക്ക് ഏതെങ്കിലും ഒരു യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റിന് ലഭിച്ച മാർക്കിന്റെ മാധ്യം കാണൽ.

group IV ലെ കുട്ടികളുടെ ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യം

(കുട്ടികളുടെ എണ്ണം വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും)

പ്രവർത്തനം 2

പ്രദേശത്തിൽ ഒരു മാസം ലഭിച്ച മഴയുടെ അളവുകൾ പട്ടികയായി കൊടുക്കുന്നു. ഒരു ദിവസം ലഭിച്ച മഴയുടെ ശരാശരി കണ്ട് നോക്കൂ.

മഴയുടെ അളവ് മീ.മീ	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
40	2
43	1
46	5
49	8
51	7
54	4
57	3

$$\begin{aligned}
 \text{മഴയുടെ മാധ്യ അളവ്} &= (40 \times 2) + (43 \times 1) + (46 \times 5) \\
 &+ (49 \times 8) + (51 \times 7) + (54 \times 4) \\
 &+ (57 \times 3) \\
 &\quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 &\quad \quad 30
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{30}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{30}$$

പ്രവർത്തനം 3

ഒരു സ്കൂളിലെ 40 കുട്ടികളുടെ ഉയരം അളന്ന് കണക്കാക്കിയ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യം എത്ര?

ഉയരം സെ.മീ	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
110-114	4
114-118	7
118-122	10
122-126	11
126-130	5
130-134	2
134-138	1

- 110-114 എന്ന വിഭാഗത്തിലുള്ള ഓരോ കുട്ടിയുടെയും ഉയരം എത്രയായി പരിഗണിക്കാം.

സൂചന : വിഭാഗങ്ങളോടുകൂടിയ ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ ഓരോ വിഭാഗത്തെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നിന് ആ വിഭാഗത്തിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധിയുടെയും ഉയർന്ന പരിധിയുടെയും മാധ്യം കണക്കാക്കിയാൽ മതി

- 110-114 എന്ന വിഭാഗത്തിലുള്ള കുട്ടികളുടെ ആകെ ഉയരമെത്ര?
- ഓരോ വിഭാഗത്തിലെയും ആകെ ഉയരം കാണുന്നതെങ്ങനെ?

സൂചന : വിഭാഗത്തിന്റെ മാധ്യം കണ്ട് ആവൃത്തികൊണ്ട് ഗുണിക്കാം.

- അവരുടെ ഉയരങ്ങളുടെ തുകയെത്ര?
- ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണമെത്ര?
- എല്ലാ കുട്ടികളുടെയും ഉയരങ്ങളുടെ മാധ്യമെന്ത്?

കൂടുതൽ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

1. വിവിധ പ്രദേശങ്ങളിലെ 40 കർഷക തൊഴിലാളികൾക്ക് ലഭിച്ച ദിവസക്കൂലിയുടെ വിവരം പട്ടികയായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ദിവസക്കൂലിയുടെ മാധ്യം കാണുക

കൂലി (രൂപ)	ആളുകളുടെ എണ്ണം
200-250	5
250-300	7
300-350	10
350-400	8
400-450	6
450-500	3
500-550	1

2. ഒരു പെട്ടിയിലെ 100 സ്ക്രൂവിന്റെ നീളം പട്ടികാരൂപത്തിൽ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. നീളത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

നീളം (മി.മി)	എണ്ണം
33-35	15
36-38	19
39-41	23
43-44	27
45-47	16

3. രണ്ട് ടാക്സി ഡ്രൈവർമാർക്ക് ഏതാനും ദിവസം കിട്ടിയ കാർവാടകയെ കുറിക്കുന്ന പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ആർക്കാണ് ശരാശരി കൂടുതൽ വരുമാനം കിട്ടിയതെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

വരുമാനം രൂപ	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം	വരുമാനം രൂപ	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
2000-2100	3	1900-2000	6
2100-2200	5	2000-2100	4
2200-2300	8	2100-2200	5
2300-2400	7	2200-2300	8
2400-2500	2	2300-2400	4
		2400-2500	3
	25		30

4. ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച മാർക്കിന്റെ പട്ടിക കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മാർക്കിന്റെ മാധ്യം 27 ആണ്. K യുടെ വിലകാണുക.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0-10	2
10-20	3
20-30	7
30-40	5
40-50	k

5. ഒരാൾപത്രയിൽ ഒരു ദിവസം പ്രവേശിപ്പിച്ച രോഗികളുടെ പ്രായം പട്ടികാരൂപത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പ്രായത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

പ്രായം	രോഗികളുടെ എണ്ണം
0-10	7
10-20	3
20-30	2
30-40	5
40-50	2
50-60	8
60-70	10

6. ഒരു വാർഡിലെ 100 കുടുംബങ്ങൾ ദൈനംദിന ചെലവിലേക്ക് പ്രതിമാസം മുടക്കുന്ന തുകയുടെ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ചെലവ് രൂപ	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
1000-2000	40
2000-3000	30
3000-4000	10
4000-5000	8
5000-6000	7
6000-7000	5

മധ്യം കാണുക? മധ്യം കണ്ടെത്തിയ ആൾ പറഞ്ഞു. വാർഡിലെ 40 ശതമാനം കുടുംബങ്ങൾ ശരാശരി ചെലവിനെക്കാൾ കുറവാണ്, പ്രതിമാസം ചെലവഴിക്കുന്നത്. ഇതിനെ കുറിച്ച് നിങ്ങളുടെ അഭിപ്രായമന്ത്?

ആവൃത്തിപ്പട്ടികയും മധ്യമവും

ഒരു കൂട്ടം അളവുകളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ മധ്യത്തിൽ വരുന്നതാണ് മധ്യം എന്നത് ഒമ്പതാം തരത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഉദാഹരണം: ഒരു ലോട്ടറി വില്പനക്കാരന് ഒരാഴ്ചയിലെ ഓരോ ദിവസവും ലഭിച്ച വരുമാനം (രൂപയിൽ) ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വരുമാനത്തിന്റെ മധ്യം കണ്ടെത്തുക.

75, 135, 90, 210, 300, 180, 240

ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ

75, 90, 135, 180, 210, 240, 300

മധ്യത്തിൽ ലഭിക്കുന്നത് 180. ആയതുകൊണ്ട് മധ്യം 180 രൂപയാണ്.

വിവരങ്ങൾ ആവൃത്തിപ്പട്ടിയുടെ രൂപത്തിലാണെങ്കിലും മധ്യം എന്നത് മധ്യത്തിൽ വരുന്ന അളവായിരിക്കണമല്ലോ.

ഒരു ക്ലാസിലെ 35 കുട്ടികളുടെ ഭാരവും എണ്ണവും പട്ടികയിൽ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ഭാരം (kg)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
32	2
34	6
37	10
38	11
40	4
43	2

ഭാരത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

35 കുട്ടികളുടെ ഭാരം ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതുകയാണെങ്കിൽ 18-ാമത്തെതായിരിക്കുമല്ലോ മധ്യമം.

32 kg ഭാരമുള്ള കുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 2

34 kg വരെ ഭാരമുള്ളവരുടെ എണ്ണം = $2+6= 8$

37 kg വരെ ഭാരമുള്ളവരുടെ എണ്ണം = $2+6+10= 18$

∴ 18-ാമത്തെ കുട്ടിയുടെ ഭാരം 37 kg.

ആയതിനാൽ മധ്യമം 37 kg.

ചെയ്ത പ്രവർത്തനത്തെ പട്ടികയായി കൊടുക്കുകയാണെങ്കിൽ.

ഭാരം (kg)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
32 വരെ	2
34 വരെ	8
37 വരെ	18
38 വരെ	29
40 വരെ	33
43 വരെ	35

18-ാമത് 37 kg.

∴ മധ്യമം 37 kg.

മിൽമ പാൽ കടയിൽ 2011 ജൂലായ് മാസത്തിൽ ചെലവായ പാലിന്റെ വിവരം പട്ടികയായി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മധ്യമം കാണുക.

പാലിന്റെ അലവ് (ലിറ്ററിൽ)	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
38	3
41	5
45	8
47	9
52	4
54	2

ഇത്തരം പട്ടികകളിൽ നിന്നും മധ്യമം കണക്കാക്കിയശേഷം വിഭാഗങ്ങളും അവയിലോരോന്നിലെയും ആവൃത്തികളുമായി ചിട്ടപ്പെടുത്തിയ പട്ടികയിൽ നിന്നും മധ്യമം കണക്കാക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങളിലേക്ക് കടക്കാം.

വിഭാഗങ്ങളോട് കൂടിയ ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ ഓരോ വിഭാഗത്തിലെയും ഉയർന്ന പരിധി വരെയുള്ള ആവൃത്തികൾ കൂട്ടിയെഴുതിയാൽ കിട്ടുന്നതിനെയാണ് സഞ്ചിതാവൃത്തി എന്ന് വിളിക്കുന്നത്.

ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന ജീവനക്കാരുടെ വയസ്സിനെ സംബന്ധിക്കുന്ന പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

വയസ്സ്	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
25-30	1
30-35	4
35-40	9
40-45	8
45-50	5
50-55	3

സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക എഴുതി മധ്യമം കാണുക.

ആകെ 30

വയസ്സ്	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
30ൽ കുറവ്	1
35ൽ കുറവ്	5
40ൽ കുറവ്	14
45ൽ കുറവ്	22
50ൽ കുറവ്	27
55ൽ കുറവ്	30

ഓരോ ഘട്ടത്തിലും വിഭാഗത്തിലും സംഖ്യകളുടെ മാറ്റവും സഞ്ചിതാവൃത്തികളുടെ മാറ്റവും ആനുപാതികമാണെന്ന സങ്കല്പത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് മധ്യമം കണക്കാക്കുന്നത്.

സഞ്ചിതാവൃത്തി ആകെ ആവൃത്തിയുടെ നേർ പകുതി ആകുമ്പോഴുള്ള സംഖ്യയാണ് (മുകളിലെ പട്ടികയിൽ വയസ്സ്) മധ്യമമായി എടുക്കേണ്ടതാണ്.

മുകളിൽ കൊടുത്ത സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടികയിൽ വയസ്സിന്റെ നിരക്കിലെ സംഖ്യകളെ x വിലകളായും സഞ്ചിതാവൃത്തികളെ y വിലകളായും എഴുതിയാൽ എന്ത് കിട്ടും.

x	30	35	40	45	50	55
y	1	5	14	22	27	30

x വിലകളുടെ മാറ്റവും y വിലകളുടെ മാറ്റവും ആനുപാതികമാണെന്ന് സങ്കല്പിക്കുന്നു. ഇത് ഉപയോഗിച്ച് x ആയി എടുത്ത സംഖ്യകളുടെ ഇടയിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട y സംഖ്യ ഏതെന്ന് കണ്ടെത്താം. ഉദാഹരണമായി മുകളിൽ കൊടുത്ത പട്ടികയിൽ x= 32 എന്നതിന്റെ y കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആനുപാതിക സങ്കല്പം ഉപയോഗിക്കാം.

$$\frac{y-1}{32-30} = \frac{5-1}{35-30}$$

ie $\frac{y-1}{2} = \frac{4}{5}$

$$y-1 = \frac{4 \times 2}{5}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{8}{5} + 1 \\ &= \frac{13}{5} \\ &= 2.6 \end{aligned}$$

മറിച്ച് y ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ ആകാൻ x എന്തായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടെത്താനും ഈ മാർഗ്ഗം തന്നെ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണം : $y = 8$ ആയാൽ x എന്തായിരിക്കും?
 $y = 8$ എന്നത് 5നും 14നും ഇടയിലാണ്.
x ന്റെ വില 35നും 40നും ഇടയ്ക്കുമായിരിക്കുമല്ലോ.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x-35}{8-5} &= \frac{40-35}{14-5} \\ \frac{x-35}{3} &= \frac{5}{9} \\ x-35 &= \frac{5 \times 3}{9} \\ &= \frac{5}{3} \\ x &= \frac{5}{3} + 35 \\ &= \frac{110}{3} = 36.6 \end{aligned}$$

$$y = \frac{30}{2} = 15 \text{ ആകാനുള്ള } x \text{ വിലയാണ് മധ്യമം}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x-40}{15-14} &= \frac{45-40}{22-14} \\ x-40 &= \frac{5}{8} \\ x &= \frac{5}{8} + 40 \\ &= 40.63 \\ \text{മധ്യമം} &= 40.63 \end{aligned}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

- ഒരു തൊഴിൽ ശാലയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ ദിവസവേതനത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മധ്യമം കാണുക.

ദിവസവേതനം (രൂപയിൽ)	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450
തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം	2	6	9	9	5	3

- ഒരു സ്കൂളിലെ കുട്ടികൾക്ക് കണക്ക് പരീക്ഷയ്ക്ക് (TE) ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ പട്ടികയാണ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

സ്കോർ	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0-10	4
10-20	6
20-30	12
30-40	18
40-50	33
50-60	13
60-70	9
70-80	5

സ്കോറുകളുടെ മധ്യമം കാണുക.

- സ്കൗട്ട് ക്യാമ്പിൽ പങ്കെടുത്ത 200 കുട്ടികളുടെ ഉയരങ്ങൾ പട്ടികയായി ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ഉയരം (സെ. മി)	കുട്ടികളുടെ ഉയരം
130-135	20
135-140	16
140-145	36
145-150	56
150-155	44
155-160	26

സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയ്യാറാക്കി മധ്യമം കാണുക.

- ഒരു വ്യവസായ ശാലയിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന സ്ത്രീകളുടെയും പുരുഷന്മാരുടെയും പ്രായം പട്ടികയായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വയസ്സ്	സ്ത്രീകളുടെ എണ്ണം	പുരുഷന്മാരുടെ എണ്ണം
20-25	12	8
25-30	17	13
30-35	21	22
35-40	26	21
40-45	16	15
45-50	12	12
50-55	6	9
ആകെ	110	100

- സ്ത്രീകളുടെ വയസ്സിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.
- പുരുഷന്മാരുടെ വയസ്സിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.
- ആകെ ജോലിക്കാരുടെ വയസ്സിന്റെ മധ്യമം കാണുക.

UNIT TEST

Marks 20
Time 1 Hr.

1. സ്കൂളിലെ 1900 കുട്ടികളുടെ സമ്പാദ്യ നിക്ഷേപത്തിന്റെ മാധ്യം 1725 രൂപയാണെങ്കിൽ ആ സ്കൂളിലെ സമ്പാദ്യ നിക്ഷേപം എത്ര? 1
2. ഒരു ക്രിക്കറ്റ് മത്സരത്തിൽ ആദ്യത്തെ 10 ഓവറിൽ ഇന്ത്യ നേടിയ റണ്ണുകളാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.
4, 8, 7, 3, 6, 12, 10, 9, 5, 2 റണ്ണുകളുടെ മധ്യം കാണുക. 1
3. 25 കുട്ടികളുടെ ഭാരം (kg) സൂചിപ്പിക്കുന്ന പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക. 3

ഭാരം (kg)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
30-35	2
35-40	7
40-45	10
45-50	5
50-55	1

4. ഒരു കോളനിയിലെ 50 കുടുംബങ്ങളുടെ പ്രതിമാസ വരുമാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടിക താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

വരുമാനം രൂപം	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
1000 - 2000	1
2000 - 3000	x-1
3000 - 4000	6
4000 - 5000	x+5
5000 - 6000	x+7
6000 - 7000	8
7000 - 8000	x+1
8000 - 9000	3

- a) x ന്റെ വില കണക്കാക്കുക. 4
 - b) ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും ആവൃത്തി കാണുക.
 - c) കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.
5. ഒരു ഹോസ്റ്റലിലേക്ക് 2011 ആഗസ്റ്റ് മാസത്തിൽ പച്ചക്കറിക്ക് ചെലവായ തുകയുടെ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. 3

ചെലവ് രൂപ	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
300	3
320	12
350	5
430	6
470	3
510	2

മധ്യം കാണുക.

6. ഒരു സീസണിൽ കശുവാമിൻ തോട്ടത്തിൽ നിന്ന് ലഭിച്ച കശുവണ്ടിയുടെ തൂക്കം സൂചിപ്പിക്കുന്ന പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

തൂക്കം (കിലോ)	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
10-15	2
15-20	5
20-25	13
25-30	6
30-35	11
35-40	12
40-45	9

- a) ആകെ എത്ര ദിവസം കശുവണ്ടി ശേഖരിച്ചു.
 b) 25 കിലോവിൽ കുറവ് കശുവണ്ടി ലഭിച്ചത് എത്ര ദിവസമാണ്.
 c) മധ്യമം കാണുക.

4

7. ഒരു ഉത്സവകാലത്ത് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത കുടുംബശ്രീ യൂണിറ്റ് സ്റ്റാളുകളിലെ വിറ്റ് വരവിന്റെ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വിറ്റ് വരവ് (രൂപ)	സ്റ്റാൾ 1	സ്റ്റാൾ 2
5000 - 7000	1	2
7000 - 9000	5	4
9000 - 11000	7	6
11000 - 13000	10	11
13000 - 15000	4	5
15000 - 17000	3	2
	30	30

ഓരോ സ്റ്റാളിലെയും വിറ്റ് വരവിന്റെ മാധ്യം കണ്ട് ഏത് സ്റ്റാളിലാണ് കൂടുതൽ വിൽപന നടന്നത് എന്ന് കണക്കാക്കുക.

4