

മുക്താഭൂ

**എസ്.എസ്.എൽ.സി.
പഠനസഹായി**

2011 – 2012

MATHEMATICS



ജില്ലാപഞ്ചായത്ത് - കണ്ണൂർ

- Chairman : **Prof.K.A.Sarala**
President District Panchayath, Kannur
- Vice-Chairman : **Sri. T. Krishnan**
Vice-President, District Panchayath, Kannur
- Smt. P.Rosa**
Chairman
Health- Education Standing Committee
Kannur District Panchayath
- Convenor : **Sri. A. Arunkumar**
DDE., Kannur
- Academic Convenor : **Sri. K. Prabhakaran**
Principal, DIET, Kannur

Editorial Board:

- 1. A.V.Ajayakumar**
EMS HSS, Pappinisseri
- 2. N.K.Remeshan**
RGMHS, Mokeri
- 3. M.V.Unnikrishnan**
Trichambaram
- 4. K.P.Damodaran**
HM, Naduvil HS
- 5. C.Mohanan**
Govt.Welfare HSS, Cherukunnu
- 6. C.Suresh Babu**
GHSS, Chala
- 7. K.P.V.Satheesh Kumar**
GHSS, Morazha
- 8. K.M.Suresh Babu**
RVHSS, Chokli
- 9. T.Narayanan**
PRM HSS, Kolavallur
- 10. T.Sukumaran**
GBHS, Madayi
- 11. C.Raghu**
SABTM HSS, Thayineri
- 12. Krishna Prabha**
Azhikode HS
- 13. Prabhakaran**
GHSS, Mathamangalam
- 14. K.Sudheer**
GHSS, Chundangappoyil
- 15. Pradeepan**
Iritty HSS
- 16. A.Sindhu**
Azhikode HS

പ്രൊഫ: കെ.എ.സരള
 പ്രസിഡണ്ട്,
 കണ്ണൂർ ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത്, കണ്ണൂർ



ആമുഖം

എല്ലാവരും പഠിക്കണം, എല്ലാവരും ജയിക്കണം. ഇതാണല്ലോ ഇന്ന് എല്ലാ വിദ്യാലയങ്ങളുടെയും പ്രവർത്തനലക്ഷ്യം, ഈ ലക്ഷ്യം സാക്ഷാത്കരിക്കുന്നതിന് പര്യാപ്തമായ രീതിയിൽ നമ്മുടെ നാട്ടിലെ ഓരോ വിദ്യാലയത്തെയും സ്വയം സമ്പൂർണ്ണമാക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഏറ്റവും ആധുനികമായ ഭൗതിക സൗകര്യങ്ങൾ നവീനവും കാലോചിതവുമായ പാഠ്യപദ്ധതി, ചട്ടുലവും ക്രിയാത്മകവുമായ മൂല്യനിർണ്ണയരീതി, വിദ്യാലയങ്ങളെ ശക്തിപ്പെടുത്താൻ ഉതകുന്ന അധ്യാപക-രക്ഷകർത്വ കൂട്ടായ്മകൾ, ശാസ്ത്രീയവും സമയബന്ധിതവുമായി നടക്കുന്ന അധ്യാപക പരിശീലന പരിപാടികൾ എന്നിവ വിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ ഗുണമേന്മയെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളിൽ പ്രധാനമാണ്. കഴിഞ്ഞ കുറേ വർഷങ്ങളായി കേരളത്തിൽ സ്കൂൾ വിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ നവീകരണം ലക്ഷ്യം വെച്ച് നടപ്പിലാക്കി വരുന്ന നിരവധി പ്രവർത്തനങ്ങൾ കൂടുതൽ ശ്രദ്ധ ചെലുത്തുന്നത് ഇത്തരം കാര്യങ്ങളിൽ തന്നെയാണ്. സാർവ്വത്രികവും ഗുണമേന്മയുള്ളതുമായ വിദ്യാഭ്യാസം നമ്മുടെ സംസ്ഥാനത്ത് ഉറപ്പാക്കുന്നതിൽ കേന്ദ്ര സംസ്ഥാന ഗവൺമെന്റുകൾക്ക് പുറമെ തദ്ദേശ സ്വയംഭരണസ്ഥാപനങ്ങളും വളരെയധികം പങ്കുവഹിച്ചു വരുന്നു. ഇക്കാര്യത്തിൽ കേരളം മികച്ച മാതൃകയാണ്.

കേരളത്തിലെ തദ്ദേശ സ്വയംഭരണസ്ഥാപനങ്ങൾ സ്കൂൾ വിദ്യാഭ്യാസം മെച്ചപ്പെടുത്തുവാൻ വൈവിധ്യമാർന്ന നിരവധി പദ്ധതികൾ ആവിഷ്കരിച്ച് നടപ്പിലാക്കി വരുന്നു. ഇവയിൽ ഏറ്റവും ശ്രദ്ധിക്കപ്പെടാത്ത വിജയം കണ്ടതുമാണ് കണ്ണൂർ ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത് നടപ്പിലാക്കി വരുന്ന മുകളും പദ്ധതി. ജില്ലയിലെ ഹൈസ്കൂളുകളിലും ഹയർസെക്കന്ററി സ്കൂളുകളിലും കുട്ടികളുടെ പഠന നിലവാരം ഉയർത്താൻ സഹായകമായ കൈപ്പുസ്തകങ്ങൾ തയ്യാറാക്കി വിതരണം ചെയ്യുക, മെച്ചപ്പെട്ട ക്ലാസ് റൂം അനുഭവങ്ങൾ കുട്ടികൾക്ക് പകർന്ന് നൽകാൻ അധ്യാപകരെ ശാക്തീകരിക്കുന്നതിന് ഉതകുന്ന പരിശീലന പരിപാടികൾ സംഘടിപ്പിക്കുക, ശാസ്ത്രീയമായ മൂല്യനിർണ്ണയരീതി വിദ്യാലയങ്ങളിൽ നടപ്പിലാക്കുക തുടങ്ങിയവയാണ് മുകളും പദ്ധതിയുടെ പ്രധാന പ്രവർത്തനങ്ങൾ. മുകളും പദ്ധതി നടപ്പിലാക്കുന്നതിൽ ആത്മാർത്ഥമായ സഹകരണവും പിൻതുണയുമാണ് അധ്യാപക-രക്ഷാകർത്വ സമൂഹങ്ങളിൽ നിന്ന് കണ്ണൂർ ജില്ലാ പഞ്ചായത്തിന് ലഭിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നത് എന്ന് ഈ അവസരത്തിൽ സന്തോഷപൂർവ്വം അറിയിക്കട്ടെ.

മുകളും പദ്ധതിയുടെ ഭാഗമായി എല്ലാ വിഷയങ്ങളിലും കുട്ടിയുടെ അന്വേഷണാത്മക പഠനത്തെ പ്രോത്സാഹിപ്പിക്കാൻ ഉതകുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങളടങ്ങിയ കൈപ്പുസ്തകങ്ങൾ ഓരോ അക്കാദമിക വർഷത്തിലും തയ്യാറാക്കി വിദ്യാലയങ്ങളിൽ സൗജന്യമായി വിതരണം ചെയ്തു വരുന്നു. പൊതുപരീക്ഷകളിൽ ഉയർന്ന വിജയം നേടാൻ ഈ കൈപ്പുസ്തകങ്ങൾ കുട്ടികൾക്ക് വളരെയധികം പ്രയോജനപ്പെടുന്നുണ്ടെന്നാണ് ജില്ലയിലെ അക്കാദമിക സമൂഹത്തിന്റെ വിലയിരുത്തൽ. പ്രഗത്ഭരായ അധ്യാപകരെ ഉൾപ്പെടുത്തി സംഘടിപ്പിക്കുന്ന ശീൽപശാലകളിലൂടെയാണ് ഈ കൈപ്പുസ്തകങ്ങൾ തയ്യാറാക്കപ്പെടുന്നത്. കൈപ്പുസ്തകങ്ങൾ കൂടുതൽ കൂടുതൽ മികവുറ്റതാക്കാൻ ഞങ്ങൾ ഓരോ വർഷവും ശ്രദ്ധിക്കുന്നു. കുട്ടികൾക്ക് മികച്ച വിജയം നേടാൻ മുകളും പദ്ധതിയുടെ ഭാഗമായി ഈ വർഷം തയ്യാറാക്കിയ വിവിധ വിഷയങ്ങളിലെ കൈപ്പുസ്തകങ്ങൾ സഹായകമാകട്ടെ എന്ന് ആശംസിച്ചുകൊണ്ട്

സ്നേഹപൂർവ്വം
പ്രൊഫ.കെ.എ.സരള
 കണ്ണൂർ ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത് പ്രസിഡണ്ട്

പി.റോസ

ചെയർപേഴ്സൺ

ആരോഗ്യ-വിദ്യാഭ്യാസ സ്റ്റാന്റിംഗ് കമ്മിറ്റി
ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത്, കണ്ണൂർ



“മുകുളം” സമഗ്ര വിദ്യാഭ്യാസ പരിപാടിയിലൂടെ കണ്ണൂർ ജില്ല കേരള വിദ്യാഭ്യാസ ചരിത്രത്തിൽ ആധികാരികമായ വിജയവും സ്ഥാനവും നേടിക്കഴിഞ്ഞു. നമ്മുടെ കുട്ടികളും അധ്യാപകരും രക്ഷിതാക്കളും വിദ്യാഭ്യാസ ഓഫീസർമാരും ജനപ്രതിനിധികളും ഒത്തൊരുമിച്ചതിന്റെ ഫലം കൂടിയാണ് ഈ നേട്ടം.

പ്രൈമറി മുതൽ ഹയർസെക്കണ്ടറി തലം വരെ ഗുണനിലവാരമുള്ള വിദ്യാഭ്യാസത്തിനായി പ്രവർത്തന പദ്ധതികൾ ‘മുകുളം’ പദ്ധതിയിലൂടെ വിഭാവനം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. 2011-12 വർഷത്തിൽ അറബി, ഉറുദു ഉൾപ്പെടെ എല്ലാ വിഷയങ്ങൾക്കും പ്രത്യേക പഠന സാമഗ്രികൾ നിർമ്മിച്ചു കഴിഞ്ഞു. കുട്ടികളുടെ അറിവ്, നിർമ്മാണശേഷിയെ പ്രചോദിപ്പിക്കുന്ന പഠന തന്ത്രങ്ങൾക്ക് പ്രാമുഖ്യം നൽകിയിട്ടുണ്ട്. ഹയർസെക്കണ്ടറി തലത്തിൽ ഇംഗ്ലീഷ്, ഇക്കണോമിക്സ് ഉൾപ്പെടെ പിസിക്സ് കെമിസ്ട്രി, ബയോളജി, അക്കൗണ്ടൻസി എന്നീ വിഷയങ്ങൾക്കും പഠന സാമഗ്രികൾ നിർമ്മിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ദൈനംദിന ആസൂത്രണത്തിനും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നതിനും അധ്യാപകരെ പ്രാപ്തരാക്കുന്ന മികവുറ്റ പഠന സഹായി എന്ന നിലയിലാണ് ‘മുകുളം’ വിഭാവനം ചെയ്തിട്ടുള്ളത്. മുകുളത്തിലെ എല്ലാ പ്രവർത്തനങ്ങളും ഏവരും ഫലപ്രദമായി പ്രയോജനപ്പെടുത്തുമെന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

പഠന മികവിനോടൊപ്പം ഉയർന്ന സാമൂഹ്യ ബോധവും പ്രവർത്തന സന്നദ്ധതയും വളർത്തുന്ന വിദ്യാഭ്യാസമാകട്ടെ നമ്മുടെ ലക്ഷ്യം. ‘മുകുളം’ സമഗ്ര വിദ്യാഭ്യാസ പദ്ധതി അതിനുള്ള ചാലകശക്തിയായി മാറട്ടെ.

സ്നേഹപൂർവ്വം

പി.റോസ

ചെയർപേഴ്സൺ

ആരോഗ്യ-വിദ്യാഭ്യാസ സ്റ്റാന്റിംഗ് കമ്മിറ്റി
ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത്, കണ്ണൂർ

സമാന്തരശ്രേണി

ആമുഖം

ഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം തന്നെ സംഖ്യകളാണ്. സംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകളിലൂന്നിയാണ് ഗണിതശാഖകളായ ബീജഗണിതം, ജ്യോമിതി, ത്രികോണമിതി തുടങ്ങിയവയുടെ തുടർച്ചയും വളർച്ചയും. പഠിതാവിന് ആശയങ്ങൾ അനുഭവവേദ്യമാകുന്ന രീതിയിലും യുക്തിചിന്ത വളർത്തുന്ന രീതിയിലും പ്രശ്നങ്ങളെ വിശകലനം ചെയ്യുന്ന സമീപനമാണ് സമാന്തരശ്രേണി എന്ന ആശയത്തിൽ സ്വീകരിക്കേണ്ടത്. വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഉൾക്കാഴ്ച രൂപീകരിച്ച് പ്രശ്ന പരിഹാരം കാണുക എന്നതാണ് ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പഠനം കൊണ്ട് ലക്ഷ്യമിടുന്നത്. സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടെത്തുന്ന പ്രക്രിയ ഉപരിപഠനത്തിന് വിവിധ ശ്രേണികളുടെ പ്രത്യേകതകളും ബീജഗണിത രൂപവും കണ്ടുപിടിക്കാൻ കൂട്ടിക്ക് സഹായകരമാകണം.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- * ശ്രേണി
- * സംഖ്യാശ്രേണി
- * സമാന്തരശ്രേണി
- * പൊതുവ്യത്യാസം
- * ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദവും പൊതുവ്യത്യാസവും തന്നാൽ ശ്രേണിയുടെ രൂപീകരണം
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടെത്തുന്നതിന് (ഏത് സമാന്തരശ്രേണിയേയും $x_n = an + b$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം)
- * 1 മുതൽ n വരെയുള്ള തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക
$$\frac{n(n+1)}{2}$$
 ആണെന്ന് കണ്ടെത്തുന്നതിന്
- * ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ തുടർച്ചയായ പദങ്ങളുടെ തുക കാണുന്നതിന്
$$\left[\text{തുക} = \frac{n}{2} (x_1 + x_n) \right]$$

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

വിവിധതരം ശ്രേണികൾ പരിചയപ്പെടുന്നതിനും തരം തിരിക്കുന്നതിനും പാഠഭാഗത്തെ പ്രവർത്തനങ്ങൾക്കു പുറമെ ചുവടെ കൊടുത്ത പ്രവർത്തനങ്ങളുമാകാം. ഉദാഹരണമായി 1) കലണ്ടർ പ്രവർത്തനം

S	M	Tu	W	Th	Fr	Sa
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

ഇതിൽ നിന്നും കുട്ടിക്ക് വ്യത്യസ്ത സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പ്രവർത്തനം നൽകാം. അതിനു സഹായകമായ ചില ചോദ്യങ്ങൾ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

- * ഒന്നാം വരിയിലെ സംഖ്യകൾ നോക്കൂ. പ്രത്യേകതയെന്ത് ?
- * രണ്ടാം വരിയിലെ സംഖ്യകൾ നോക്കൂ. പ്രത്യേകതയെന്ത് ?
- * ഓരോ വരിയിലേയും സംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകതയെന്ത് ?
- * ഓരോ നിരയിലേയും സംഖ്യകളോ ? പ്രത്യേകതയെന്ത് ?
- * കോണോടു കോൺ വരുന്ന കളങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ എഴുതുക.
ഏത് ക്രമത്തിലെന്നു പറയുക. ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കുക

S	M	Tu	W	Th	Fr	Sa
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

ഗുണനപ്പട്ടിക

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനപ്പട്ടിക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു അവയിൽ നിന്നും സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ എടുത്തെഴുതുക

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

* വരികളിലെ സംഖ്യകൾ എന്ത് ക്രമം പാലിക്കുന്നു? നിരകളിലെ സംഖ്യകളോ ?

* കോണോടു കോൺ വരുന്ന സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ എഴുതുക. ഓരോ ക്രമത്തിലെയും പ്രത്യേകതകൾ എന്ത് ?

വ്യത്യസ്ത തരം ശ്രേണികൾ തിരിച്ചറിയാനുള്ള കൂടുതൽ പ്രവർത്തനങ്ങൾ നൽകുമല്ലോ.

തുടർന്ന് ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നു തുടങ്ങി ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണ് സമാന്തരശ്രേണി എന്ന ആശയത്തിലെത്തിച്ചേരാം. ഇങ്ങനെ ഓരോ സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ യോടും കൂട്ടുന്ന സ്ഥിര സംഖ്യയാണ് പൊതുവ്യത്യാസം

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- * ആദ്യപദം 6 ഉം പൊതുവ്യത്യാസം 10 ഉം വരുന്ന സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക
- * ആദ്യപദം -6 ഉം പൊതുവ്യത്യാസം 10 ഉം വരുന്ന സമാന്തര ശ്രേണി എഴുതുക
- * ആദ്യപദം 6 ഉം പൊതുവ്യത്യാസം -10 ഉം ആയ സമാന്തര ശ്രേണി എഴുതുക
- * ആദ്യപദം -6 ഉം പൊതുവ്യത്യാസം -10 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക
- * 10 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി 6 പൊതുവ്യത്യാസമായി വരുന്ന സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക
- * 6 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകൾ എഴുതുക. ശിഷ്ടം 5 വരുന്ന സംഖ്യകൾ എഴുതുക. രണ്ട് ശ്രേണികളും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക
- * $\frac{1}{2}$ ആദ്യപദവും -2 പൊതുവ്യത്യാസവുമായ സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക

ചുവടെ കൊടുത്തവയിൽ സമാന്തരശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കുക

- * 111, 122, 133, 144
- * -111, -122, -133, -144
- * 1.11, 1.22, 1.33, 1.44
- * 11.1, 12.2, 13.3, 14.4
- * 1110, 1220, 1330, 1440
- * $\frac{111}{4}$, $\frac{122}{4}$, $\frac{133}{4}$, $\frac{144}{4}$
- * 2, 5, 9, 14 20
- * 1, 1, 2, 3, 5, 8
- * 1.1, 11, 110, 110
- * 2, 3, 5, 7
- * 17, 2, -13, -28
- * -8, -4, -2, -1
- * $3 + \sqrt{2}$, $5 + \sqrt{2}$, $7 + \sqrt{2}$, $9 + \sqrt{2}$
- * $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{7}$

ചുവടെ കൊടുത്തവയെല്ലാം സമാന്തരശ്രേണികളാണ്. ഓരോന്നിലെയും വിട്ടഭാഗത്തെ പദങ്ങൾ (സംഖ്യകൾ) എഴുതുക

- * --- 15, --- 35, ---
- * --- 8, --- 0

- * --- 8, --- -8, ---
- * 12, ---, ---,, -12
- * ---, ---, 18, 54, ---
- * 13, --- 20, ---
- * 13, ---, ---, 27
- * -4, ---, 12 ---
- * 2, ---, x
- * x, --- ,y
- * x, --- y, ---
- * x, y, ---, ---
- * x, ---, ---, y

സമാന്തരശ്രേണിയുടെ സ്ഥാനവ്യത്യാസവും പദവ്യത്യാസവും ആനുപാതികമാണെന്ന് തെളിയിക്കുവാൻ പ്രോജക്ട്, വർക്ക്ഷീറ്റ് തന്ത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം. ഇത് രണ്ട് ഘട്ടങ്ങളിലൂടെ സമർത്ഥിക്കാം.

- ഘട്ടം 1 - ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏത് രണ്ട് പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം പൊതു വ്യത്യാസത്തിന്റെ ഗുണിതമായിരിക്കും
- ഘട്ടം 2 - ഏത് രണ്ട് പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം ആ പദങ്ങളുടെ സ്ഥാനവ്യത്യാസത്തിനെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതായിരിക്കും

ഇവിടെ പൊതുവ്യത്യാസമായിരിക്കും ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്നു കാണാം. ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഈ ആശയത്തിലെത്തിയശേഷം താത്വികമായി ഇക്കാര്യം സമർത്ഥിക്കേണ്ടതാണ്.

$$f, \quad f + d, f + 2d,+ f+(n-1)d$$

$$.....f + (m-1)d$$

ഈ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ m-ാം പദവും n-ാം പദവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെടുത്താൽ

$$(a+(m-1)d) - (a+(n-1)d)$$

$$= (m-n)d$$

അതായത് പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം സ്ഥാനവ്യത്യാസത്തെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതായിരിക്കും

$$\frac{m\text{-ാം പദം} - n\text{-ാം പദം}}{m-n} = \text{പൊതുവ്യത്യാസം}$$

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 18 ഉം 12-ാം പദം 39 ഉം ആയാൽ 19-ാം ഘട്ടമായിരിക്കും

- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദം 5 ഉം 13-ാം പദം -25 ഉം ആണെങ്കിൽ 33-ാം പദം എത്ര?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 6-ാം പദം $2\frac{1}{2}$ വും 10-ാം പദം $14\frac{1}{2}$ ഉം ആയാൽ 12-ാം പദം എത്ര?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 7-ാം പദം 17 ഉം 11-ാം പദം 27 ഉം ആയാൽ മൂന്നാം പദം എത്രയായിരിക്കും? ഒന്നാം പദം എത്രയായിരിക്കും?
- * 75, 69, 63..... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദമാണോ 7 എന്ന് പരിശോധിക്കുക. -3 ഈ ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദമാകുമോ?

ചുവടെ കൊടുത്ത ശ്രേണികളുടെ n - ൾ പദം കണ്ടെത്തുക.

- a) 2, 5, 8, -----
- b) 5, 7, 8-----
- c) 1, 7, 13-----
- d) 9, 13, 17 -----
- e) 20, 13, 16 -----
- f) 30, 25, 20 -----
- g) 13, 10, 10 -----

കൂടാതെ കുട്ടികൾക്കിഷ്ടമുള്ള 5 സമാന്തരശ്രേണികൾ കൂടി എഴുതുക. ഇവയുടെയെല്ലാം n - ൾ പദം, പൊതുവ്യത്യാസം, ആദ്യപദം ഇവ താഴെ കൊടുത്ത പട്ടികയിൽ പൂരിപ്പിച്ച് പരസ്പര ബന്ധം കണ്ടെത്തട്ടെ

ക്രമ നമ്പർ	സമാന്തര ശ്രേണി	ആദ്യ പദം	പൊതു വ്യത്യാസം	n - ൾ പദം	n - ൾ പദത്തിലെ n ഉൾപ്പെടാത്ത പദം	n - ൾ പദത്തിലെ n ന്റെ ഗുണകം

സൂചന

1. n - ൾ പദം എപ്പോഴും $an+b$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും. (ഇവിടെ b യുടെ വില പൂജ്യമാകാം)
2. n - ൾ പദത്തിലെ n ന്റെ ഗുണകത്തിന്റെയും n ഉൾപ്പെടാത്ത പദത്തിന്റെയും തുകയാണ് ആദ്യപദം
3. n - ൾ പദത്തിൽ n ന്റെ ഗുണകവും ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും തുല്യമായിരിക്കും
4. $x_n = an+b$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഏതുശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

പ്രവർത്തനം

ഏതാനും സമാന്തരശ്രേണികളുടെ n - ഓം പദം കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പൊതുവ്യത്യാസം, ആദ്യപദം കാണുക

- | | | |
|------------|--------------------------------|-------------------------|
| 1) $3n+5$ | 2) $3n-7$ | 3) $5n-2$ |
| 4) $4n-1$ | 5) $10-4n$ | 6) $2-7n$ |
| 7) $10-4n$ | 8) $\frac{3}{4} - \frac{n}{4}$ | 11) $(n-1)^2 - (n+1)^2$ |

- * ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം 9 ആണ്. അതിന്റെ 16-ാം പദത്തിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് 20 -ാം പദം ?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 21-ാം പദത്തിനേക്കാൾ 18 കൂടുതലാണ് 27-ാം പദം. എങ്കിൽ 27-ാം പദത്തിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് 29-ാം പദം ?
- * 6,10,14.....എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ എത്രാം പദമാണ് 1622
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദത്തോട് എത്ര പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാലാണ് 12-ാം പദം ലഭിക്കുന്നത് ?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 7-ാം പദത്തോട് 8 പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നത് എത്രാം പദമായിരിക്കും?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 20 ഉം 18-ാം പദം 60 ഉം ആയാൽ പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര?
- * 20 -ാം പദം 45 ഉം 15 -ാം പദം 30 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 10 -ാം പദം എത്ര? പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 11-ാം പദം 1 ഉം 8 -ാം പദം -142 ഉം ആണ്. എങ്കിൽ 14-ാം പദം എത്ര? 17-ാം പദം, 18 -ാം പദം, 24-ാം പദം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 15-ാം പദത്തോട് 77 കൂട്ടിയപ്പോൾ 26-ാം പദം കിട്ടി. എങ്കിൽ 26 -ാം പദത്തോട് എത്രകൂട്ടിയാൽ 37 -ാം പദം കിട്ടും 26 -ാം പദത്തോട് എത്ര കൂട്ടിയാൽ 29 -ാം പദം കിട്ടും ?
- * ഒരുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ 10-ാം പദം 17 ഉം 17 -ാം പദം 10 ഉം എങ്കിൽ പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5 -ാം പദം 14 ഉം 14-ാം പദം 5 ഉം ആയാൽ പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 100 -ാം പദം 200 ഉം 200 -ാം പദം 100 ആയാൽ പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര ?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ $(n-1)$ -ാം പദം $4n+7$ ആയാൽ ആദ്യപദവും പൊതുവ്യത്യാസവും 10 -ാം പദംകാണുക
- * ഒരുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം $5n+6$ ആയാൽ അതിന്റെ എത്രാം പദമാണ് 56?
- * ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ $(n-2)$ -ാം പദം $4n+7$ ആയാൽ എത്രാം പദമാണ് 55 ?
- * n^2+n എന്ന ബീജഗണിത വാചകം ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദമാണോ എന്ന് എങ്ങനെ പരിശോധിക്കാം

* n^2+n എന്നതിൽ n ന് 1,2,3,4.....തുടങ്ങിയ വിലകൾ നൽകിയാൽ 2,6,12,20.....എന്ന ശ്രേണി കിട്ടുമല്ലോ. ഇതൊരു സമാന്തര ശ്രേണിയല്ല. ഇവിടെ അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കൂടിക്കൂടി വരുന്നു (ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യല്ല)

ഇതിനെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ സമീപിക്കാം

$$\text{ശ്രേണിയുടെ } n\text{-ാം പദം} = n^2+n$$

$$\begin{aligned}(n+1)\text{-ാം പദം} &= (n+1)^2 + (n+1) \\ &= n^2+3n+2\end{aligned}$$

$$(n+1)\text{-ാം പദം} - n\text{-ാം പദം} = n^2+3n+2 - (n^2+n)$$

$$= 2n+2 \text{ ഇത് } n \text{ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു വാചകമാണ്.}$$

ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയല്ല. സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയായിരിക്കും. അതിനാൽ n^2+n ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദമല്ല.

1) $2n^2+1$

2) n^3

3) $\frac{1}{3n}$

4) $\frac{1}{5} + \frac{1}{n}$

5) $(2n+1)^2 - (2n-1)^2$

പ്രവർത്തനം

200 നും 500 നും ഇടയിൽ 7 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്?

കാണേണ്ട സംഖ്യ 200 ൽ കൂടുതലും 500 ൽ കുറവുമാണല്ലോ

$201 \div 7$ ശിഷ്ടം എത്ര?

$201 = 7 \times 28 + 5$: ശിഷ്ടം = 5

$202 \div 7$ ശിഷ്ടം =

$203 \div 7$ ശിഷ്ടം =

ആദ്യപദം എത്ര?

ഇനി അവസാന പദമെത്രയെന്ന് നോക്കാം

$409 = 7 \times \dots + \dots$:ശിഷ്ടം =

$498 \div 7$ ശിഷ്ടം =

$497 \div 7$ ശിഷ്ടം =

അവസാന പദമെത്ര?

പൊതു വ്യത്യാസമെത്ര? ഇനി പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണാമല്ലോ.

ഉദാഹരണം

400 നും 700 നും ഇടയിൽ 6 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 3 വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണമെത്ര?

$401 \div 6 = 6 \times \dots + \dots$:ശിഷ്ടം =

$402 \div 6 = 6 \times \dots + \dots$:ശിഷ്ടം =

$403 \div 6$

$404 \div 6$

$405 \div 6$ ആദ്യപദം ലഭിച്ചല്ലോ

699 നെ 6 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം എത്ര ?

$$699 = 6 \times \dots\dots\dots + \dots\dots\dots : \dots\dots\dots \text{ശിഷ്ടം} = \dots\dots\dots$$

അവസാന പദം ലഭിച്ചല്ലോ

ഇനി പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണാമല്ലോ

പ്രവർത്തനം

8 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1,2,3,4,5 വരുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ക്രമത്തിലെഴുതുക

ഇവയോരോന്നിലെയും പൊതുവ്യത്യാസമെത്ര?

NB : സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടത്തിന്റെ പ്രത്യേകത ബോധ്യപ്പെടുത്താമല്ലോ.

200 നും 500 നുമിടയിൽ 9ന്റെ എത്ര ഗുണിതങ്ങൾ ? ഏറ്റവും ചെറുതും വലുതും കാണുക.

സമാന്തരശ്രേണികളുടെ പദങ്ങളുടെ തുക

പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു സംഖ്യ

1. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 3 ഉം തുക 18 ഉം ആയ വ്യത്യസ്ത സമാന്തര ശ്രേണികൾ എഴുതുക

$$6,6,6 \quad (6,6,6,)$$

$$6 - 1, 6, 6 + 1 \quad (5,6,7)$$

$$5 - 1, 6, 7 + 1 \quad (4,6,8)$$

2. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 3 ഉം തുക 30 വരുന്ന ശ്രേണികൾ എഴുതുക

3. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 5 ഉം തുക 45 ഉം വരുന്ന ശ്രേണികൾ എഴുതുക

പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു സംഖ്യയായി വരുന്ന സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതി പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക. (സൗകര്യത്തിന് പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 3,5,7,9 എന്നിവ മാത്രം എടുക്കുക)

ശ്രേണി	പദങ്ങളുടെ എണ്ണം	പദങ്ങളുടെ തുക	മധ്യപദം	മധ്യപദത്തിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഓരോ ജോഡി പദങ്ങളും ജോഡി തുകയും								ആദ്യപദം+ അവസാനപദം
				പദങ്ങൾ (ജോഡി)				തുക (ജോഡി)				
12,14,16,18,20	5	80	16	14,18	12,20	-	-	32	32	-	-	32
5,6,7	3	18	6	5,7	-	-	-	12	-	-	-	12

പട്ടിക പരിശോധിച്ച് താഴെകൊടുത്ത ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കാണുക

1. മധ്യപദവും തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
2. പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

3. മധ്യപദവും ജോടി തുകയും
4. ആദ്യപദവും അവസാന പദവും തന്നാൽ മധ്യപദം കാണുന്നതെങ്ങനെ?
5. മധ്യപദവും പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും കിട്ടിയാൽ തുക എങ്ങനെ കാണാം?
6. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം, ആദ്യപദം, അവസാനപദം എന്നിവ തന്നാൽ തുക എങ്ങനെ കാണാം ?

$$\begin{aligned} \text{തുക} &= \text{മധ്യപദം} \times \text{പദങ്ങളുടെ എണ്ണം} \\ \text{തുക} &= \frac{\text{പദങ്ങളുടെ എണ്ണം} (\text{ആദ്യപദം} + \text{അവസാനപദം})}{2} \end{aligned}$$

പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ട സംഖ്യ

1. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 4 ഉം തുക 60 ഉം വരുന്ന വ്യത്യസ്ത സമാന്തര ശ്രേണി കാണുക
 $15, 15, 15, 15$ $15, 15, 15, 15$
 $13-3, 15-1, 15+1- 15+5$ $12, 14, 16, 18$
 $12-3, 14-1, 16+1, 18+3$ $9, 13, 17, 21$
2. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 4 ഉം തുക 40 ഉം വരുന്ന സമാന്തര ശ്രേണികൾ ഏതൊക്കെ
3. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 8 ഉം തുക 72 ഉം വരുന്ന സമാന്തര ശ്രേണികൾ എഴുതുക
 പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക : സൗകര്യത്തിന് പദങ്ങളുണ്ടെ എണ്ണം 2,4,6,8 വരുന്ന ശ്രേണികൾ എടുക്കുക

ശ്രേണി	പദങ്ങളുടെ എണ്ണം	പദങ്ങളുടെ തുക	മധ്യപദം	മധ്യപദത്തിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഓരോ ജോഡി പദങ്ങളും ജോഡി തുകയും								ജോടികളുടെ എണ്ണം	ആദ്യപദം+ അവസാനപദം
				പദങ്ങൾ (ജോഡി)				തുക (ജോഡി)					
12,14,16,18,	6	60	30	12,18	-	-	-	30	-	-	-	2	30

പട്ടിക പരിശോധിക്കുക, താഴെ കൊടുത്ത ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടെത്തുക

1. പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
2. ജോടികളുടെ എണ്ണവും തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
3. ഓരോ ജോടി തുകയുടെയും പ്രത്യേകത
4. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം, ആദ്യപദം, അവസാനപദം എന്നിവ തന്നാൽ തുക എങ്ങനെ കാണാം
 $\text{തുക} = \text{ജോടികളുടെ എണ്ണം} \times \text{ജോടി തുക}$

തുക = ജോടികളുടെ എണ്ണം (ആദ്യപദം + അവസാനപദം)

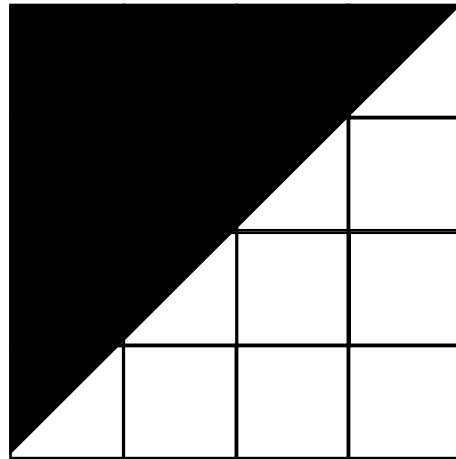
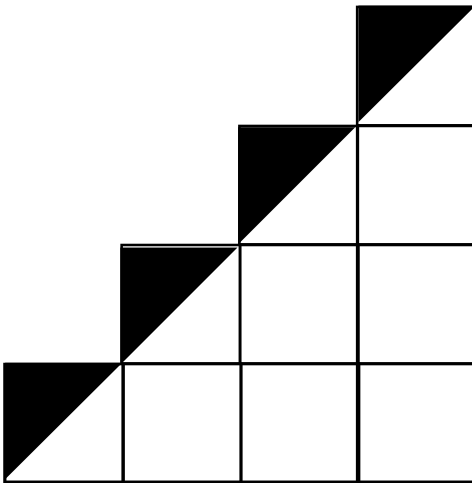
$$\text{തുക} = \frac{\text{പദങ്ങളുടെ എണ്ണം (ആദ്യപദം + അവസാനപദം)}}{2}$$

രണ്ടു പട്ടികയും താരതമ്യം ചെയ്യുക. പൊതുവായ സൂത്രവാക്യത്തിലെത്തിച്ചേരുക

$$n \text{ പദങ്ങളുടെ തുക} = \frac{n(2f+(n-1)d)}{2}$$

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങളുടെ തുക 80 ആണ്. ആദ്യത്തെയും പത്താമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക എത്ര?
- ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങളുടെ തുക 80 വരുന്നതും പൊതുവ്യത്യാസം 4 വരുന്നതുമായ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ എല്ലാ പദങ്ങളും എഴുതുക
- 5,8,11,.....എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് 7,10,13,..... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക?

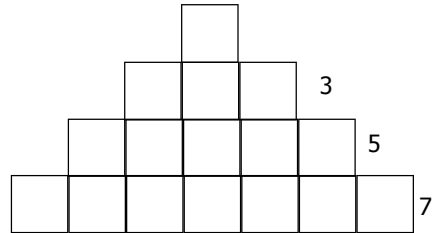
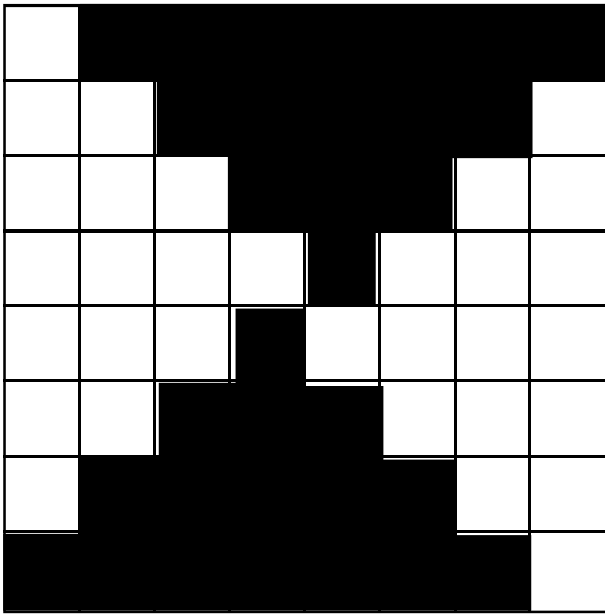
എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക



ഇതിൽ നിന്ന് $1+2+3+4 = \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}$ എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ

അതിനാൽ $1+2+3+4+5 = \frac{5^2}{2} + \frac{5}{2}$

$1+2+3+4+\dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ എന്ന് കാണാം



$$1+3+5+7 = \frac{8^2}{4}$$

$$1+3+5+7+9 = \frac{10^2}{5}$$

$$\frac{1+3+5+7+\dots+2n-1}{n} = \frac{(2n)^2}{4} = n^2$$

1 മുതൽ തുടർച്ചയായ n എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക = $\frac{n(n+1)}{2}$

1 മുതൽ തുടർച്ചയായ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക = n^2

- 1) ആദ്യത്തെ 40 എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര
 7 മുതൽ തുടർച്ചയായ 40 എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര
- 2) 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര
 2 മുതൽ 40 വരെയുള്ള ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര
 5 മുതൽ 100 വരെയുള്ള 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ തുകയെത്ര
- 3) 30 പദങ്ങളുള്ള ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ 15-ാം പദത്തിന്റെയും 16-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 17 ആണ്. എങ്കിൽ എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും തുകയെത്ര
- 4) ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം $4n - 3$ ആയാൽ
 - എ) ആദ്യപദമെന്ത്
 - ബി) പൊതുവ്യത്യാസമെന്ത്
 - സി) എത്രാംപദമാണ് 65

- ഡി) ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുകയെത്ര
- 5) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 12 പദങ്ങളുടെ തുക 78 ആണ്. എങ്കിൽ
- എ) 6-ാം പദത്തിന്റെയും 7-ാം പദത്തിന്റെയും തുകയെത്ര
- ബി) പൊതുവ്യത്യാസം 2 എങ്കിൽ എല്ലാ പദങ്ങളും എഴുതുക
- സി) പൊതുവ്യത്യാസം 3 എങ്കിൽ എല്ലാ പദങ്ങളും എഴുതുക
- 6) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 9-ാം പദം പൂജ്യം.
എങ്കിൽ 19-ാം പദത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് 29-ാം പദം

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

- 1) 1,3,5,9,17 ഇവ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ 5 പദങ്ങളായിരിക്കുമോ. എന്തുകൊണ്ട്
- 2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 3-ാം പദം $\frac{17}{2}$ ഉം 7-ാം പദം $\frac{37}{2}$ ഉം ആയാൽ പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര. ഒന്നാം പദം എത്ര
- 3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളുടെ തുക $5n^2+3n$ ആയാൽ ആദ്യപദം എത്ര 2-ാം പദം എത്ര. പൊതുവ്യത്യാസം കാണുക. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിത രൂപം എഴുതുക
- 4) നീളങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലായ 15 ഇരുമ്പ് കമ്പികൾ ആരോഹണക്രമത്തിൽ തുല്യ അകലത്തിലായി കുത്തനെ ഉറപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഏറ്റവും ചെറിയ കമ്പിയുടെ നീളം 44.5 സെ.മി. ഉം ഏറ്റവും വലിയ കമ്പിയുടെ നീളം 155. 5 സെ.മി. ഉം ആയാൽ കമ്പികളുടെ ആകെ നീളമെത്ര.
- 5) -120, -114, -108,.....എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 134 എന്ന സംഖ്യ ഒരു പദമാണോ. എന്തുകൊണ്ട്.
- 6) രവി തന്റെ നോട്ടുബുക്കിൽ 8 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 3 കിട്ടുന്ന എല്ലാ 3 അക്ക സംഖ്യകളും മെഴുതി. എങ്കിൽ രവി എത്ര സംഖ്യകൾ എഴുതിയിരിക്കും. തുകയെത്രയായിരിക്കും
- 7) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 15 പദങ്ങളുടെ തുക 8-ാം പദത്തിന്റെ 15 മടങ്ങായിരിക്കും. എന്ന് തെളിയിക്കുക.
- 8) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ 10 പദങ്ങളുടെ തുക 210 ആണ്. എന്നാൽ ഈ പത്ത് പദങ്ങളെയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക എത്ര

പ്രൊജക്ട്

പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളായ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളിൽ ഒരേണ്ണ പൂർണ്ണ വർഗമാണെങ്കിൽ മറ്റേകും പദങ്ങൾ പൂർണ്ണവർഗമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളും ഒരു പദം പോലും പൂർണ്ണവർഗമല്ലാത്തതുമായ സമാന്തര ശ്രേണിയുണ്ടോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,.....എന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 1,4,9,16,25,36,..... എന്നിങ്ങനെ പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

1,3,5,7,9,.....എന്ന ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 1,9,25,49,81,.....എന്നിങ്ങനെ പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

2,4,6,8,.....എന്ന ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 4,16,36,64,.....എന്നിങ്ങനെ പൂർണ്ണ വർഗങ്ങളുണ്ട്.

ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരശ്രേണിക്കുള്ളിലെ മറ്റൊരു സമാന്തരശ്രേണിയായ 3,9,15,21,27,33,39,45,51,57,63,69,75,81,..... ലും പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരശ്രേണിക്കുള്ളിലെ മറ്റൊരു സമാന്തരശ്രേണിയായ 4,10,16,22,28,34,40,46,52,58,64,70,.....ലും പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

1,2,3,4,5,6,.....എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ k ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ ആയാൽ k^2 ഒരു പൂർണ്ണ വർഗമാണ്

k^2 നോട് $2kd$ കൂട്ടിയാൽ അതും ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ തന്നെ (എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൊതുവ്യത്യാസം d യും എണ്ണൽ സംഖ്യയാണ്)

$k^2+2kd+d^2$ ഉം പൂർണ്ണവർഗം ആണ്

$$[k^2+2kd+d^2 = (k+d)^2] = k^2+d(2k+d)$$

$(k+2d)^2, (k+3d)^2, (k+4d)^2$ എന്നിങ്ങനെ

പൂർണ്ണവർഗങ്ങളായ അനേകം പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളായ മറ്റ് സമാന്തരശ്രേണികൾ എടുത്തും ഈ ആശയം രൂപീകരിക്കുമല്ലോ?

3,7,11,15,19,.....എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പദങ്ങൾ എണ്ണൽ സംഖ്യകളാണെങ്കിലും പൂർണ്ണവർഗങ്ങളായ പദങ്ങൾ ഇല്ല.

3,8,13,18,23,.....ഈ സമാന്തരശ്രേണിക്കും മേൽപറഞ്ഞ പ്രത്യേകത കാണാം. ഇവിടെ 'ഒന്നു' കളുടെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം 3,8 അതാണ്.

ഒരു പൂർണ്ണവർഗ സംഖ്യയുടെയും 'ഒന്നു' കളുടെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം 3,8 ആകില്ലെന്ന് ഓർക്കുമല്ലോ.

12,27,32,47,.....എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 'ഒന്നു' കളുടെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം 2,7 ആണ്. ഈ ശ്രേണിയിൽ പൂർണ്ണവർഗങ്ങളായ പദങ്ങൾ ഇല്ല. എന്തുകൊണ്ട് ?

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ കണ്ടെത്തുമല്ലോ

പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളും ഒരു പദം പോലും പൂർണ്ണവർഗമല്ലാത്തതുമായ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി 8,8,8,8,8,.....

എല്ലാ പദങ്ങളും പൂർണ്ണവർഗങ്ങളായ സമാന്തരശ്രേണിയിതാ 9,9,9,9,9,.....
MUKULAM MATHS.....

മൂല്യനിർണ്ണയ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

1) മാന്ത്രിക ചതുരത്തിലെ സംഖ്യകൾ അധിസംഖ്യ പൊതുവ്യത്യാസമായി വരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളാണ്.

* മാന്ത്രിക ചതുരത്തിന്റെ മധ്യത്തിൽ വരുന്ന സംഖ്യ ഏത്

* മാന്ത്രിക ചതുരത്തിലെ സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക

* മാന്ത്രിക തുക എത്ര

	3	
27		11
7		15

2) സംഖ്യാപാറ്റേൺ ശ്രദ്ധിക്കൂ

$$\begin{array}{rcl}
 1 & = & 1 \\
 1+2 & = & 3 \\
 1+2+3 & = & 6 \\
 1+2+3+4 & = & 10 \\
 & = & \\
 & = & \\
 & = & \\
 1+2+3+.....+x & = & 190
 \end{array}$$

* പാറ്റേണിലെ 5-ാം വരി, 6-ാം വരി ഇവ എഴുതുക

* 15-ാമത്തെ വരിയിലെ പദങ്ങളുടെ തുക എത്ര

* x ന്റെ വില കാണുക

3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ m -ാം പദം n ; n -ാം പദം m

* പൊതുവ്യത്യാസം കാണുക

* ആദ്യപദം കാണുക

* $m+n$ ൾ പദം കാണുക

* $m+n$ പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക

4) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിത രൂപം $2n^2+3n$ ആകുമോ. എന്തുകൊണ്ട്

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $2n^2+3n$ ആകുമോ. എന്തുകൊണ്ട്

5) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 50 പദങ്ങൾ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതി. ഈ പദ

ങ്ങൾ തന്നെ അവരോഹണക്രമത്തിലെഴുതി. ഈ രണ്ട് ശ്രേണികളുടെയും ഒന്നാം പദങ്ങൾ തുല്യമാകുമോ. അവസാന പദങ്ങൾ തുല്യമാകുമോ. ഈ രണ്ട് ശ്രേണികളുടെയും ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള തുകകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്ത്.

- 6) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം $\frac{1}{9}$. 9-ാം പദം $\frac{1}{5}$
 * ഈ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസമെത്ര
 * 14-ാം പദം കാണുക
- 7) -9,-14,-19,-24..... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 25-ാം പദം x_{25} ഉം പത്താം പദം x_{10} ഉം കാണുക. $x_{25} - x_{10}$ എത്രയാണ്
- 8) 3,7,11.....എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 34-ാം പദം കാണുക. 10093 ഈ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഒരു പദമാണോ. ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക
- 9) 800 രൂപ 8% വാർഷിക സാധാരണ പലിശ ലഭിക്കുന്നതിന് ഒരു ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു. ഒരു വർഷം കഴിയുമ്പോഴുള്ള പലിശയെന്ത്. രണ്ട് വർഷം കഴിയുമ്പോഴുള്ള പലിശയെന്ത്. 3 വർഷം കഴിയുമ്പോഴുള്ള പലിശയെന്ത്
 പലിശകളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക
 ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. 23-ാമത്തെ വർഷാവസാനം ലഭിക്കുന്ന പലിശ കാണുക
- 10) ഒരു ചക്രിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ അളവുകൾ യഥാക്രമം $x-20$, x , $x+20$, $x+40$ വീതമായാൽ x ന്റെ വില കാണുക. കോണളവുകൾ കാണുക. കോണളവുകൾ സമാന്തര ശ്രേണിയിലാണോ
- 11) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 7-ാം പദവും 2-ാം പദവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 20. പൊതുവ്യത്യാസം കാണുക. ഈ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദം 9 ആയാൽ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് 153.
- 12) സമാന്തരശ്രേണിയിലായ 10 സംഖ്യകളുടെ തുക 85 ആണ്. ഇവയിലെ അഞ്ചാമത്തെ സംഖ്യ 8 ആണ്.
 * ആദ്യത്തെയും 10-ാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുക എത്ര
 * ആറാമത്തെ സംഖ്യ ഏത്
 * ആദ്യത്തെ മൂന്ന് സംഖ്യകൾ എഴുതുക
- 13) $-6, -\frac{11}{2}, -5$ എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് -25.
- 14) ഒരു ചതുര പലകയുടെ വീതി, നീളം, ഉയരം ഇവ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുർച്ചയായ 3 പദങ്ങളാണ് നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും ഉയരത്തിന്റെയും തുക 27 യൂണിറ്റ്. ചതുരപലകയുടെ വ്യാപ്തം 405 ഘ. യൂണിറ്റ്. നീളം, വീതി, ഉയരം ഇവ കാണുക.
- 15) രണ്ട് സമാന്തരശ്രേണികളുടെ പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $7n+1 : 4n+27$ അവയുടെ 5-ാം പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക
- 16) $(x-y)^2, x^2+y^2, (x+y)^2$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക
- 17) ഒരു സ്കൂളിലെ 1-ാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾ ഒരു വൃക്ഷത്തെ, 2-ാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾ 2 വൃക്ഷത്തെ, 3-ാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾ 3 വൃക്ഷത്തെ എന്നിങ്ങനെ സ്കൂളിനു ചുറ്റും വൃക്ഷത്തെകൾ

നടാൻ തീരുമാനിച്ചു. +2 വരെയുള്ള ഈ സ്കൂളിൽ ഓരോ ക്ലാസും 3 ഡിവിഷൻ വീതമുണ്ട്. കുട്ടികൾ നടുന്ന വൃക്ഷതൈകളുടെ ആകെ എണ്ണമെത്ര.

- 18) ഓരോ ജന്മദിനത്തിനും വർഷക്ക് അവളുടെ അച്ഛൻ 5 രൂപ കൊടുക്കും. വർഷക്ക് ഇപ്പോൾ 21 വയസായെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ കൈവശമുള്ള ആകെ തുകയെത്ര
- 19) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദത്തിന്റെയും 7-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 6. ഗുണനഫലം 8. ആദ്യത്തെ 16 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

അദ്ധ്യായം - 2

വൃത്തങ്ങൾ

ആമുഖം

ഒൻപതാം ക്ലാസ്സിലെ വൃത്തങ്ങൾ എന്ന അധ്യായത്തിന്റെ തുടർച്ചയാണ് ഈ പാഠഭാഗം. ഇവിടെ പ്രധാനമായും കോണുകളിലൂടെ വൃത്തത്തെ മനസ്സിലാക്കാനുള്ള ശ്രമമാണ് നടത്തുന്നത്. രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന, പരസ്പരം ലംബമായതും അല്ലാത്തതുമായ രണ്ടു വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ചേർന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന രൂപങ്ങൾ വരച്ചറിയുന്നതിലൂടെ പാഠം ആരംഭിക്കുന്നു. ഒരു വര വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ചാപങ്ങളും, വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളും, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോണും അതിന്റെ മറുചാപത്തിലെ കോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, നാലു മൂലകളിലും കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാവുന്ന ചതുർഭുജങ്ങൾ എന്നിവയുടെയെല്ലാം സവിശേഷതകളും പ്രയോഗങ്ങളും തുടർചിന്തകളുമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ബഹുഭുജങ്ങൾക്ക് തുല്യപരപ്പുള്ള വൃത്ത സമചതുരത്തിന്റെ നിർമ്മിതി ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

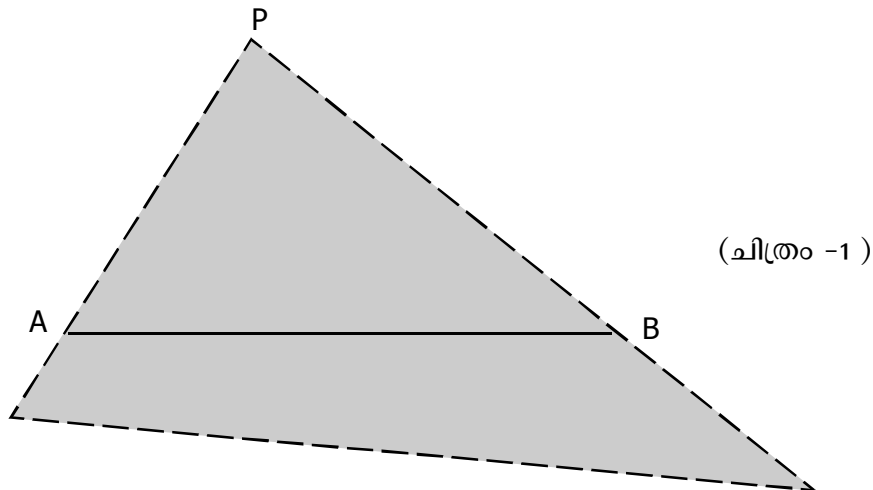
- * രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന വരകൾ നിശ്ചിത കോണിൽ ഖണ്ഡിക്കുകയാണെങ്കിൽ അങ്ങിനെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ചേർന്ന് ചാപജോഡികൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു.
- * വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ അതിലെ മറ്റേതൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് മട്ടകോൺ ആയിരിക്കും.
- * വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ബൃഹത്കോൺ ആയിരിക്കും.
- * വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ന്യൂനകോൺ ആയിരിക്കും.
- * ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചപ്പോൾ മട്ടകോൺ കിട്ടിയെങ്കിൽ ആ ബിന്ദു വൃത്തത്തിലായിരിക്കും.
- * മറുചാപം എന്ന ആശയം
- * വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാകുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്. ആ ചാപം അതിന്റെ മറുചാപത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലുണ്ടാകുന്ന കോൺ.
- * വൃത്തഖണ്ഡം എന്ന ആശയം
- * ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.
- * മറുഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.
- * ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.
- * ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാല് മൂലകളിൽ കൂടിയും കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരക്കാം.
- * ചക്രീയ ചതുർഭുജം എന്ന ആശയം

- * ഒരു വൃത്തത്തിൽ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിച്ചാൽ $PA \times PB = PC \times PD$ ആയിരിക്കും.
- * ഒരു വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ നീട്ടിവെച്ച് വൃത്തത്തിന് പുറത്ത് P എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിച്ചാൽ $PA \times PB = PC \times PD$ ആയിരിക്കും
- * ഒരു വൃത്തത്തിൽ AB എന്ന വ്യാസത്തെ CD എന്ന ഞാൺ ലംബമായി P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $AP \times PB = PC^2$ ആയിരിക്കും.
- * ചതുരം, ത്രികോണം, ചതുർഭുജം ഇവ ഓരോന്നിനും തുല്യപരപ്പുള്ളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ നിർമ്മിതി
- * രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വരകൾ നിശ്ചിത കോണിൽ ഖണ്ഡിക്കുകയാണെങ്കിൽ അങ്ങനെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ചേർന്ന് ചാപജോഡികൾ ഉണ്ടാകുന്നു.
 - * വരകൾ 90° കോണിൽ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോൾ
 - * വരകൾ 90° ൽ കുറവായ കോണിൽ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോൾ
 - * വരകൾ 90° ൽ കൂടുതലായ കോണിൽ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോൾ

പ്രവർത്തനം (1)

(സാമഗ്രികൾ : കാർഡ് ബോർഡിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ത്രികോണം)

ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങൾ, ബോർഡിൽ വെച്ച ഒരു രേഖയുടെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകത്തക്കവിധം വെക്കുന്നു. ആ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു (ചിത്രം -1)

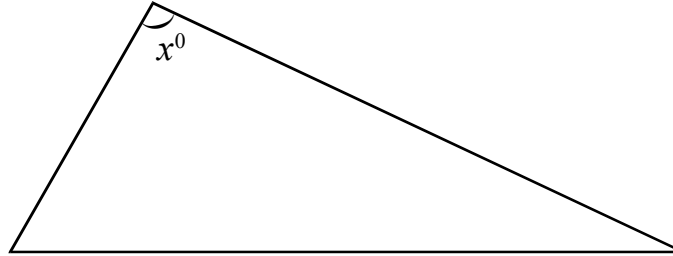


ഇത്തരത്തിൽ ത്രികോണം വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ക്രമീകരിച്ച് മൂലയുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു.

(സൂചന : കാർഡ് ബോർഡിലോ, തെർമോകോൾ ഷീറ്റിലോ മൊട്ടുസൂചി ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്താം. മൂലയുടെ സ്ഥാനം കുട്ടികളെക്കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്താം)

പ്രവർത്തനം (2)

സാമഗ്രികൾ : ചിത്രം (2) ൽ x ന്റെ വില $40^\circ, 55^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 125^\circ, 140^\circ$ ആകത്തക്കവിധം കാർഡ്ബോർഡിൽ വെട്ടിയെടുത്ത പത്ത് ത്രികോണങ്ങൾ (90° കോണിന്റെ അളവിൽ രണ്ടെണ്ണം)



(ചിത്രം - 2)

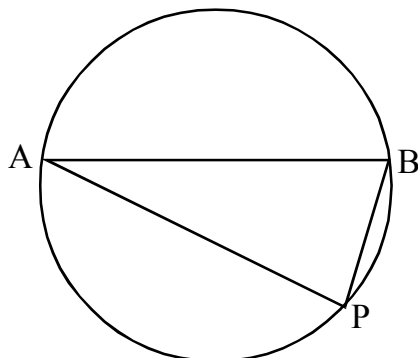
(i) ഓരോ ത്രികോണവും ഓരോ ഗ്രൂപ്പിന് നൽകുന്നു. ഓരോ ഗ്രൂപ്പും ഒരു ചാർട്ട് പേപ്പറിൽ ഒരേ നീളത്തിൽ AB എന്ന വര വരച്ച് മുകളിൽ ചെയ്ത പ്രവർത്തനം (1) ആവർത്തിക്കുന്നു. (വരയുടെ ഇരു ഭാഗങ്ങളിലും പരമാവധി ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ)

ഓരോ ഗ്രൂപ്പും അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ ചേർന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന രൂപത്തിന്റെ സവിശേഷത ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. (അർദ്ധ വൃത്തമായതും അല്ലാത്തതും)

(ii) ഓരോ ഗ്രൂപ്പിനും ലഭിച്ച രൂപങ്ങൾ വെട്ടിയെടുക്കുന്നു. AB യിലൂടെ മുറിച്ച് രണ്ട് ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ഈ ഭാഗങ്ങൾ ഗ്രൂപ്പുകളിൽ കൈമാറി, ഏതെല്ലാം ഭാഗങ്ങൾ ചേർത്തുവെക്കുമ്പോഴാണ് ഒരു വൃത്തം കിട്ടുന്നത് എന്ന് കണ്ടെത്തുന്നു. ആ വൃത്തത്തിലെ ഇരുഭാഗങ്ങളിലെയും കോണുകളുടെ സവിശേഷത ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

(iii) പ്രവർത്തനം 2(i) ൽ വരച്ച അതേ നീളത്തിൽ AB എന്ന വര വ്യാസമാക്കി നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. നേരത്തെ കാർഡ്ബോർഡിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ത്രികോണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് AB യുടെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. (ഒരു ത്രികോണം ഉപയോഗിച്ച് ഒരേണ്ണം മാത്രം) വശങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ അളവ് 90° 90° ൽ കുറവ് 90° ൽ കൂടുതൽ വരുമ്പോൾ, അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിലാണോ, വൃത്തത്തിന് പുറത്താണോ വൃത്തത്തിനകത്താണോ എന്ന് ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

* വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് മട്ടകോൺ ആയിരിക്കും. (തെളിവ് പാഠപുസ്തകത്തിലെ പേജ് 29)

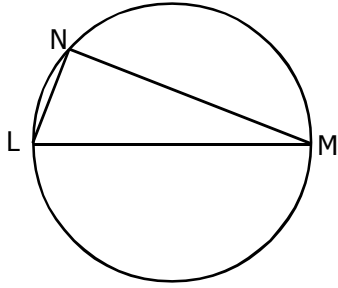


ചിത്രം (3)

(ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസം
LAPB മട്ടകോൺ ആയിരിക്കും)

WORK SHEET

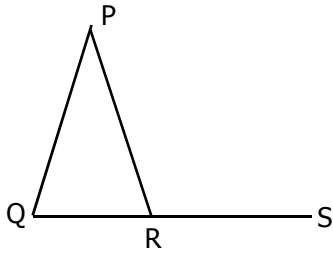
1)



ചിത്രത്തിൽ LM വ്യാസമാണ്

$\angle LNM = \dots\dots\dots$

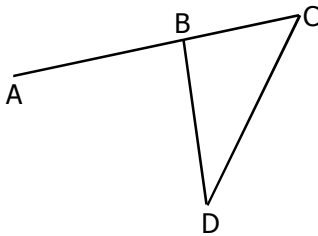
2)



$\angle PQR = 70^\circ$, $\angle QPR = 45^\circ$ ആയാൽ

$\angle PRS = \dots\dots\dots$

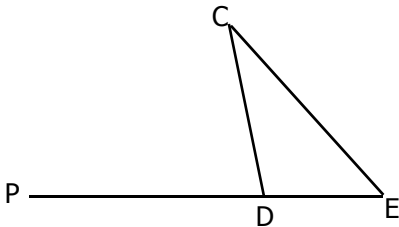
3)



$\angle ABD = 90^\circ$, $\angle BDC = 35^\circ$ ആയാൽ

$\angle BCD = \dots\dots\dots$

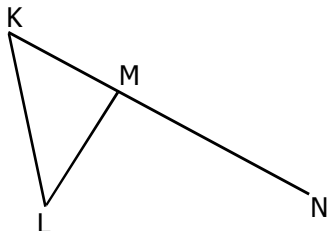
4)



$\angle CDP = 80^\circ$, ആയാൽ $\angle E$ യുടെ അളവ്
ആകാവുന്നതേത് ?

$(65^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ)$

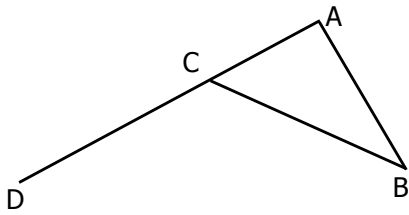
5)



$\angle LMN = 90^\circ$, ആയാൽ $\angle K$ യുടെ അളവ്
ആകാവുന്നതേത് ?

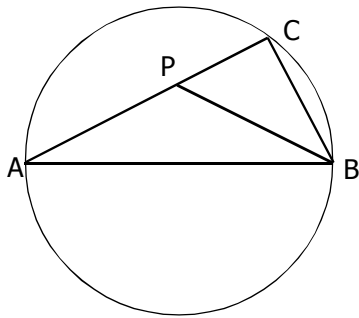
$(120^\circ, 100^\circ, 90^\circ, 60^\circ)$

6)



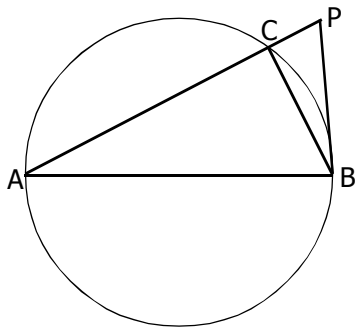
$\angle BAC = 90^\circ$, ആയാൽ $\angle BCD$ യുടെ
അളവ് ആകാവുന്നതേത് ?
($90^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 85^\circ$)

7)



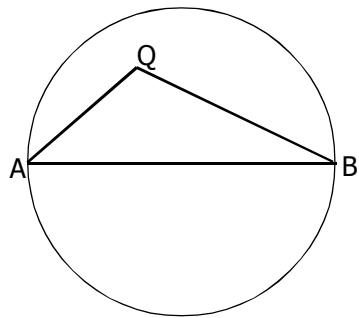
ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്
 $\angle ACB, \angle APB$, ഇവയിൽ ഏതാണ് വലുത് ?

8)



ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്
 $\angle ACB, \angle APB$, ഇവയിൽ ഏതാണ് വലുത് ?

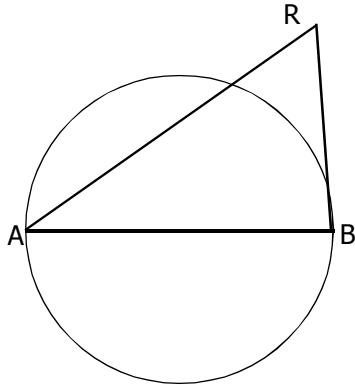
* വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ബിന്ദുവുമായി
യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ബൃഹദ്കോൺ ആയിരിക്കും.
(തെളിവ് പാഠപുസ്തകത്തിൽ പേജ് 31 ൽ)



ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്
 $\angle AQB$ ബൃഹദ്കോൺ ആയിരിക്കും

ചിത്രം (4)

- * വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ന്യൂനകോൺ ആയിരിക്കും.
(തെളിവ് പാഠപുസ്തകത്തിൽ പേജ് 31 ൽ)



ചിത്രം (5)

ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്
 $\angle ARB$ ന്യൂനകോൺ ആയിരിക്കും

- * ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചപ്പോൾ മട്ടകോൺ കിട്ടിയെങ്കിൽ ആ ബിന്ദു വൃത്തത്തിലായിരിക്കും

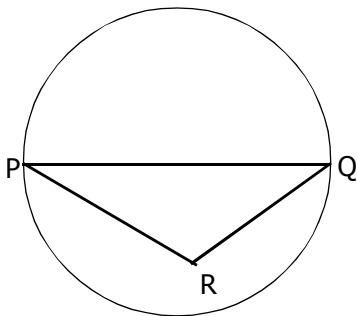
ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിനകത്താകില്ല. (വൃത്തത്തിനകത്താകണമെങ്കിൽ ഈ കോൺ ബൃഹത് കോൺ ആയിരിക്കണം)

ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിന് പുറത്തുമല്ല. (വൃത്തത്തിന് പുറത്താണെങ്കിൽ ഈ കോൺ ന്യൂന കോൺ ആയിരിക്കണം)

അതുകൊണ്ട് ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിൽ തന്നെയാണ്.

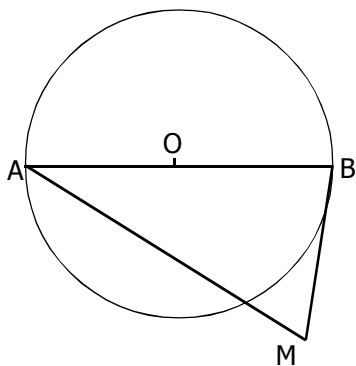
(ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിലാണ് എന്ന് നേരിട്ടു തെളിയിക്കുന്നതിന് പകരം, വൃത്തത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ കോൺ മട്ടമല്ല എന്നാണ് തെളിയിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുന്നതിനെ Proof by contraposition എന്ന് വിളിക്കുന്നു)

1)



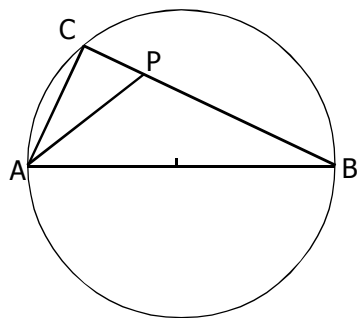
ചിത്രത്തിൽ PQ വ്യാസമാണ്
ചുവടെ കൊടുത്തവയിൽ
 $\angle PRQ$ ന്റെ അളവ് ആകാവുന്നതേത് ?
(50° , 70° , 90° , 110°)

2)



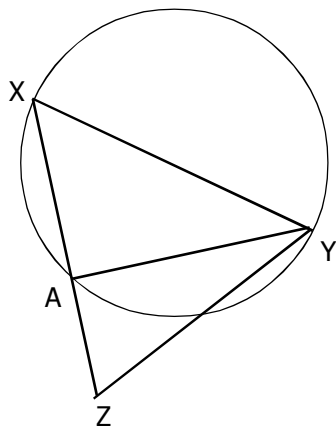
ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം
ചുവടെ കൊടുത്തവയിൽ
 $\angle AMB$ യുടെ അളവ് ആകാവുന്നതേത് ?
(85° , 90° , 95° , 100°)

3)



ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്
 $\angle APB = 125^\circ$ ആയാൽ
 $\angle ACB$, $\angle PAC$ ഇവ കാണുക

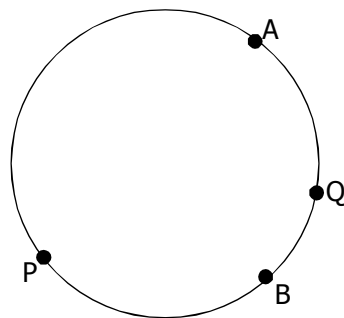
4)



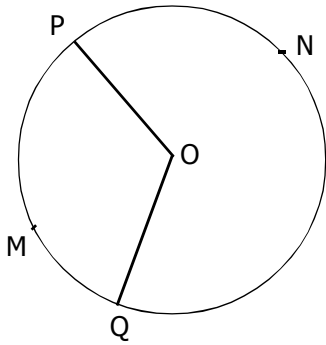
ചിത്രത്തിൽ XY വ്യാസമാണ്
 $\angle XYZ = 20^\circ$ ആയാൽ
 $\angle XAY$, $\angle XZY$ ഇവ കാണുക

ചാപവും മറുചാപവും

ചിത്രത്തിൽ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തെ
APB, AQB എന്നീ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു
ഇവയിൽ ചാപം APB യുടെ മറുചാപമാണ്
ചാപം AQB



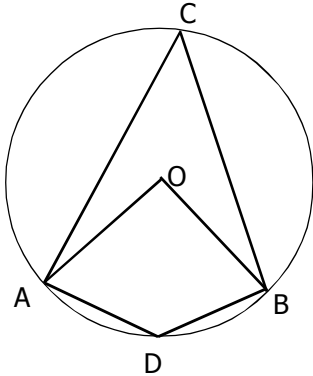
*



ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം

- 1) ചാപം PMQ ന്റെ മറുചാപം ഏത് ?
- 2) ചാപം PMQ ന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ ഏത് ?
- 3) ചാപം PMQ, ചാപം PNQ
ഇവയുടെ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ തുകയെത്ര ?

*



ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം

- 1) ചാപം ADB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ ഏത്?
- 2) ചാപം ADB ലെ കോൺ ഏത് ?
- 3) ചാപം ADB യുടെ മറുചാപം ഏത് ?
- 4) ചാപം ADB യുടെ മറുചാപത്തിലെ കോൺ ഏത് ?

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും മറുചാപത്തിലെ കോണും

WORKSHEET (2)

- 1) ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം

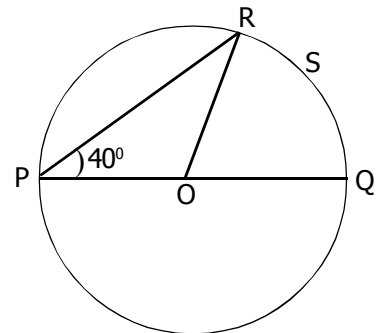
$$\angle P = 40^\circ$$

$$\angle ORP = \dots\dots\dots$$

$$\angle POR = \dots\dots\dots$$

$$\angle QOR = \dots\dots\dots$$

ചാപം QSR ന്റെ കേന്ദ്രകോണളവും $\angle QPR$ ന്റെ അളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമേത് ?



2) ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം

$$\angle OAM = 30^\circ$$

$$\angle OBM = 40^\circ \text{ ആകുന്നു}$$

$$\angle OMA = \dots\dots\dots$$

$$\angle OMB = \dots\dots\dots$$

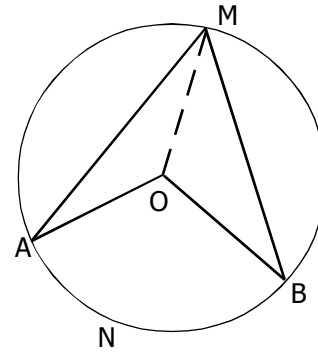
$$\angle AOM = \dots\dots\dots$$

$$\angle BOM = \dots\dots\dots$$

$$\angle AMB = \dots\dots\dots$$

$$\angle AOB = \dots\dots\dots$$

ചാപം ANB യുടെ കേന്ദ്രകോണളവും $\angle AMB$ യുടെ അളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്ത് ?



3) ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം

$$\angle OPA = 20^\circ \quad \angle OQA = 70^\circ \text{ ആകുന്നു}$$

$$\angle OAQ = \dots\dots\dots$$

$$\angle OAP = \dots\dots\dots$$

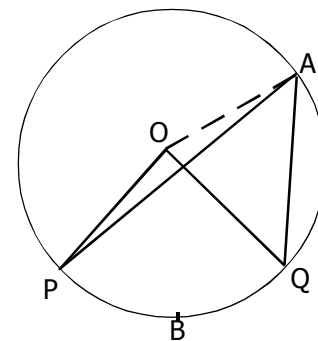
$$\angle QOA = \dots\dots\dots$$

$$\angle POA = \dots\dots\dots$$

$$\angle PAQ = \dots\dots\dots$$

$$\angle POQ = \dots\dots\dots$$

ചാപം PBQ ന്റെ കേന്ദ്രകോണളവും $\angle PAQ$ ന്റെ അളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്ത് ?



4) ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം

$$\angle OAC = 40^\circ \quad \angle OBC = 65^\circ$$

$$\angle OCA = \dots\dots\dots$$

$$\angle OCB = \dots\dots\dots$$

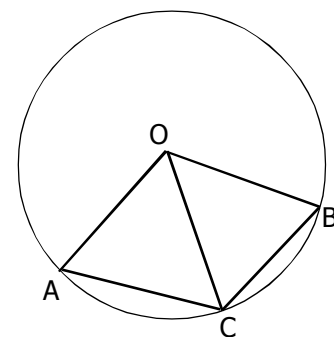
$$\angle AOC = \dots\dots\dots$$

$$\angle BOC = \dots\dots\dots$$

$$\angle ACB = \dots\dots\dots$$

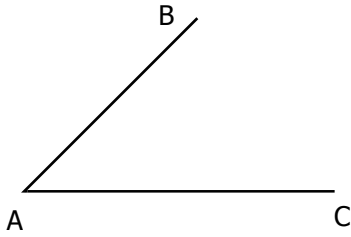
$$\angle AOB = \dots\dots\dots$$

ചാപം ADB യുടെ കേന്ദ്രകോണളവും $\angle ACB$ യുടെ അളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്ത് ?



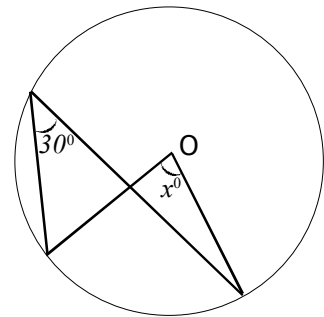
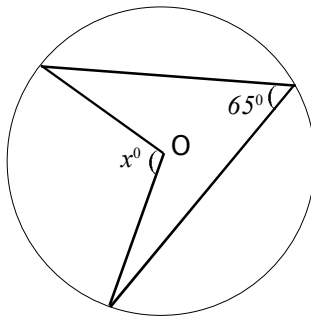
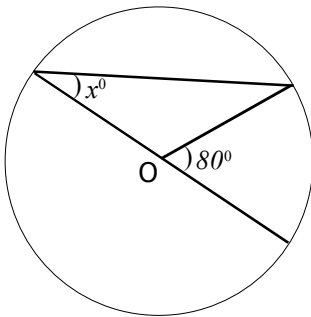
* വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാകുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ് ആ ചാപം അതിന്റെ മറുചാപത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലുണ്ടാകുന്ന കോൺ (തെളിവ് പാഠപുസ്തകത്തിലെ പേജ് 33,34,35,36 ൽ)

ഒരു കോണിന്റെ പകുതി അളവുള്ള കോണിന്റെ നിർമ്മിതി

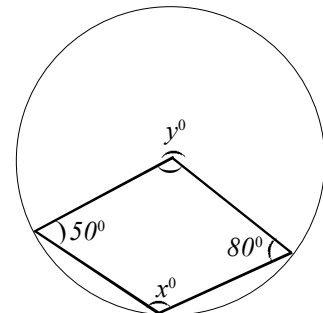
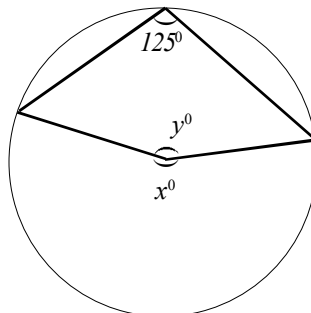
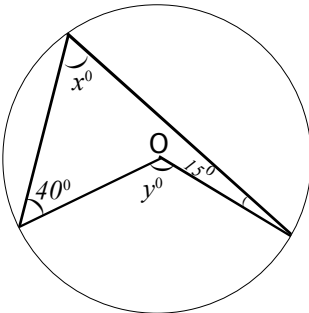


- * AB യെ P ലും AC യെ Q ലും ഖണ്ഡിക്കത്ത കവിധം A കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു
- * കോണിന് പുറത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു R അടയാളപ്പെടുത്തി PR, QR വരയ്ക്കുന്നു
($\angle BAC$, $\angle PRQ$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്ത് ?)

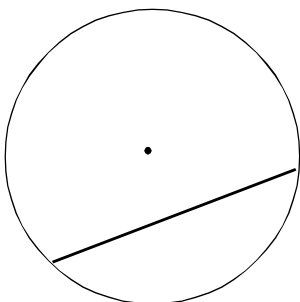
- * ചുവടെ കൊടുത്ത ഓരോ ചിത്രത്തിലും x ന്റെ വില കണക്കാക്കുക
(ഓരോന്നിലും O വൃത്തകേന്ദ്രം)



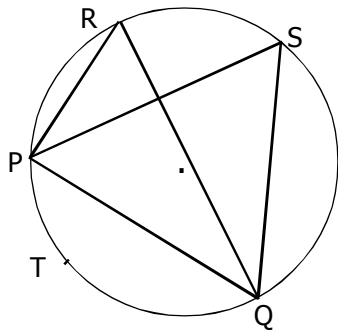
- * ചുവടെ കൊടുത്ത ഓരോ ചിത്രത്തിലും x, y ഇവയുടെ വില കാണുക
(ഓരോന്നിലും O വൃത്തകേന്ദ്രം)



വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങൾ

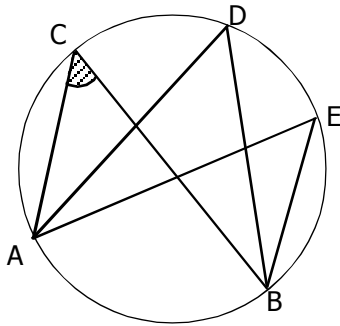


ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണും അതിനെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ഇത്തരം ഭാഗങ്ങളെ വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽ $\angle PRQ = 50^\circ$ ആയാൽ
 ചാപം PTQ ന്റെ കേന്ദ്ര കോണളവ് എത്ര?
 $\angle PSQ$ എത്ര ?

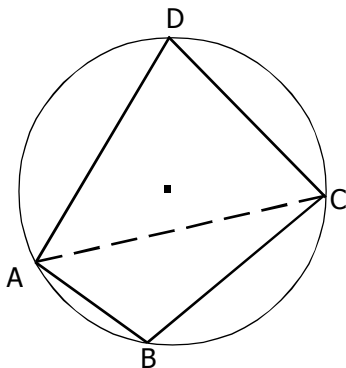
പ്രവർത്തനം



ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു കാർഡ് ബോർഡിൽ വരയ്ക്കുന്നു.
 ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം വെട്ടിയെടുത്ത് D, E എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ചേർത്തുവെച്ചാൽ ഓരോ കോണും ഒന്നിനോടൊന്ന് ചേർന്നു നിൽക്കുന്നതായി കാണാമല്ലോ
 ($\angle ACB, \angle ADB, \angle AEB$ ഇവ ഓരോന്നും ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളാണ്)

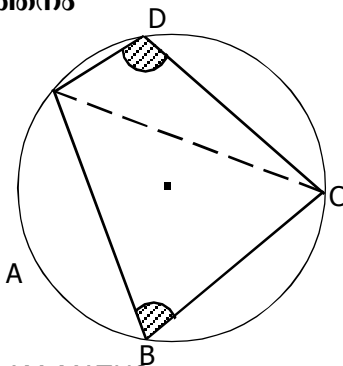
ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം മറുഖണ്ഡത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതി ആയതുകൊണ്ട് അവ തുല്യമായിരിക്കും

* അതായത് ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.



ചിത്രത്തിൽ $\angle ADC = 75^\circ$ ആകുന്നു
 ചാപം ABC യുടെ കേന്ദ്ര കോണളവ് എത്ര?
 ചാപം ADC യുടെ കേന്ദ്രകോണളവ് എത്ര ?
 $\angle ABC$ എത്ര ?

പ്രവർത്തനം



ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു കാർഡ്ബോർഡിൽ വരയ്ക്കുന്നു
 ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം (ഒരേ ആരമുള്ള വൃത്താംശങ്ങൾ) വെട്ടിയെടുത്ത് ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ചേർത്തു വെക്കുന്നു



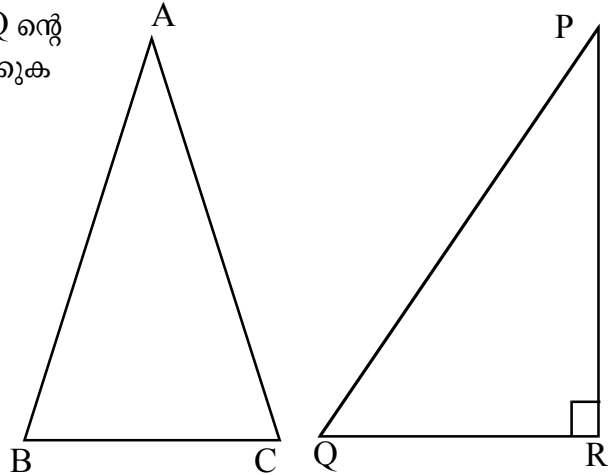
($\angle ADC$, $\angle ADC$ ഇവ മറുഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകളാണ്)

ഒരു ജോടി മറുഖണ്ഡങ്ങളിലെ ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ തുക 360° ആണ്. അതുകൊണ്ട് അവയിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയിരിക്കും.

* അതായത് മറുഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.

(സൂചന : മുകളിൽ ചെയ്ത രണ്ടു പ്രവർത്തനങ്ങൾ ഐ.സി.ടി ടൂൾ ഉപയോഗിച്ചും തയ്യാറാക്കാവുന്നതാണ്)

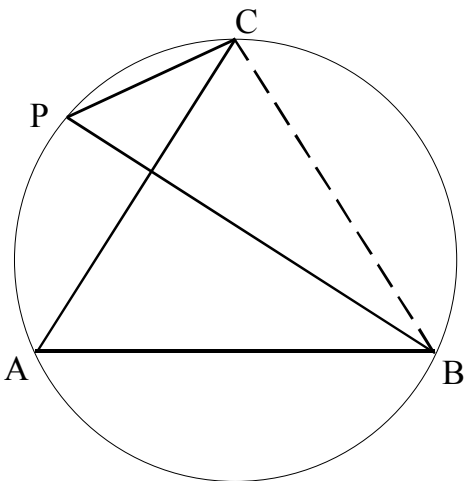
* ചിത്രത്തിലെ PQR ഒരു മട്ടത്രികോണമാണ്.
 $\angle A$ യും $\angle P$ യും $BC = QR$ ആണ് $\triangle ABC$ യുടെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം PQ ന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക



2

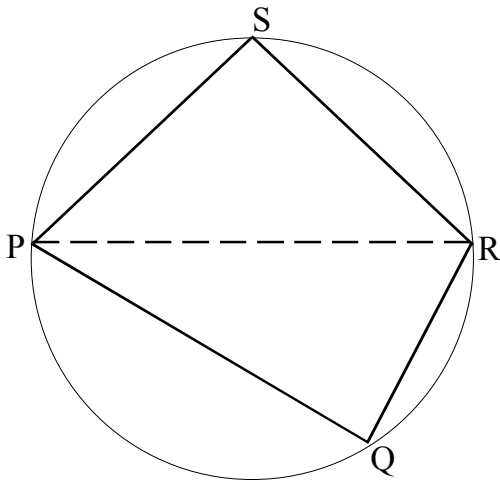
(സൂചന : BC യ്ക്ക് C ലംബമായി യിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ $\triangle ABC$ യുടെ പരിവൃത്തത്തെ Dൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. $\triangle ABC$ യുടെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം BD ആയിരിക്കുമല്ലോ $\triangle BCD = \triangle QRP$. $BD = PQ$]

1)



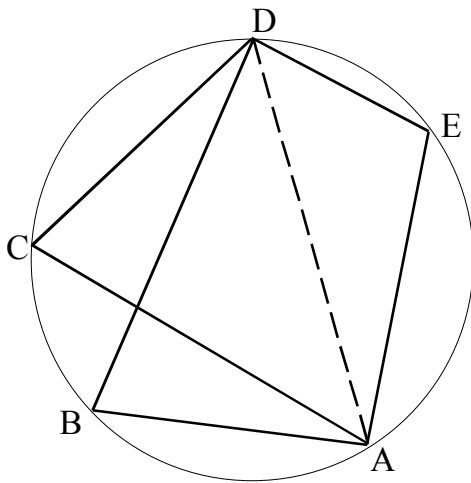
ചിത്രത്തിൽ $\angle BAC = 55^\circ$ ആയാൽ $\angle BPC$ എത്ര ?

2)



ചിത്രത്തിൽ $\angle PQR = 100^\circ$ ആയാൽ
 $\angle PSR$ എത്ര ?

3)



ചിത്രത്തിൽ $\angle ABD = 65^\circ$ ആയാൽ
 $\angle ACD$ എത്ര ?
 $\angle AED$ എത്ര ?

വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

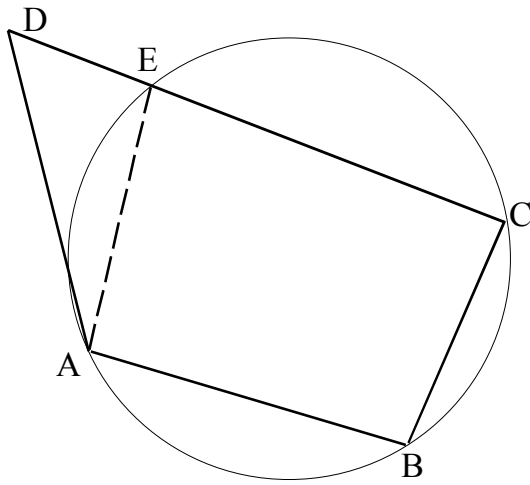
* ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.

(മറുവണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണ് എന്ന ആശയം ഉപയോഗിക്കാമല്ലോ)

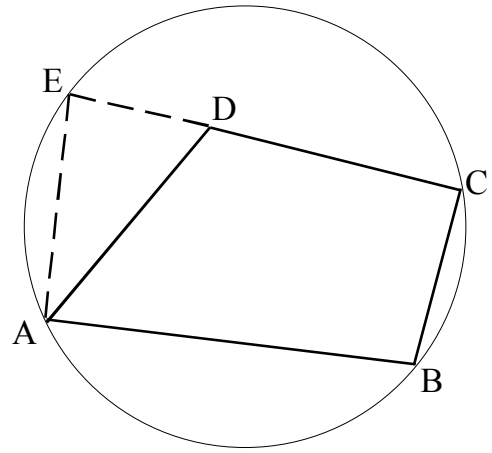
ഇത് മറിച്ചുപറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ ?

അതായത് ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാല് മൂലകളിൽ കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന് പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ ആ മൂലയിലേയും എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാണ്. അകത്താണെങ്കിൽ തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലും



ചിത്രത്തിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° ൽ കുറവായിരിക്കും

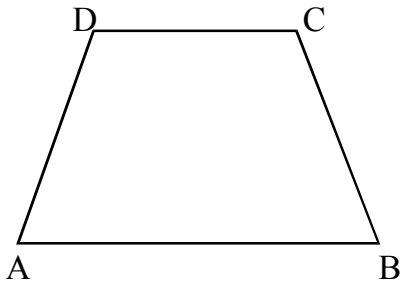


ചിത്രത്തിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° ൽ കൂടുതലായിരിക്കും

(തെളിവ് പാഠപുസ്തകത്തിലെ പേജ് 48, 49 ൽ)

സൂചന : തെളിവിനാവശ്യമായ മുന്നറിവ് ഉറപ്പിക്കുന്നതിന് വർക്ക്ഷീറ്റ് (1) ൽ അല്പം മാറ്റം വരുത്തി ഉപയോഗപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്)

A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയുള്ള വൃത്തത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി നാലാമത്തെ ബിന്ദു (D) ചലിപ്പിച്ച് ആശയം ബോധ്യപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്



ചതുർഭുജം ABCD ൽ $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

A, B, C ഇവയിൽ കൂടി ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ വൃത്തത്തിന് പുറത്തല്ല (പുറത്താകണമെങ്കിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാകണം)

D വൃത്തത്തിന് അകത്തല്ല (അകത്താണെങ്കിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലാകണം) അതുകൊണ്ട് D വൃത്തത്തിൽ തന്നെയാണ്.

* ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽ കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം

(ഇത്തരം ചതുർഭുജത്തെ ചക്രീയ ചതുർഭുജം എന്ന് വിളിക്കും)

* ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ചക്രീയ ചതുർഭുജം ഏത് ? അല്ലാത്തവ ഏത് ? കാരണം വിശദമാക്കുക

- (i) എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമായ ചതുർഭുജം
- (ii) ഒരു കോൺ 80° ആയ സാമാന്തരികം
- (iii) സാമന്തരവശങ്ങളിലൊന്നിലെ കോണുകൾ 70° വീതം ആയ ലംബകം
- (iv) സാമന്തരവശങ്ങളിലൊന്നിലെ കോണുകൾ $80^\circ, 90^\circ$ ആയ ലംബകം

* ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളൊന്നും ചക്രിയമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക

(സൂചന : സാമാന്തരികം ABCD യിൽ $\angle A = \angle C$

ചതുരമല്ലാത്തതിനാൽ $\angle A \neq 90^\circ$ അതുകൊണ്ട് $\angle A + \angle C \neq 180^\circ$)

* സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകങ്ങളൊന്നും ചക്രിയമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക

(സൂചന : PQRS ഒരു സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകമാണെങ്കിൽ $PQ \parallel RS$)

$\angle P \neq \angle Q$

$PQ \parallel RS$ ആയതുകൊണ്ട് $\angle P + \angle S \neq 180^\circ$

അതുകൊണ്ട് $\angle Q + \angle S = 180^\circ$]

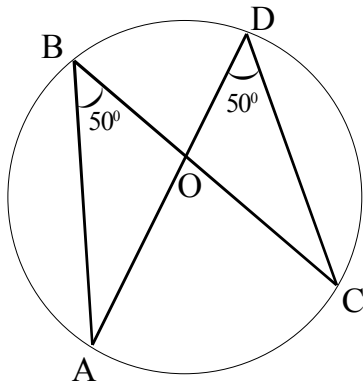
1) ചക്രിയ ചതുർഭുജം ABCD ൽ $\angle C = 50^\circ$, $\angle D = 95^\circ$ ആയാൽ $\angle A$, $\angle B$ ഇവ കാണുക

2) ചതുർഭുജം ABCD ൽ $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 85^\circ$ ആകുന്നു. $\angle D$ എത്ര? Dയുടെ സ്ഥാനം A,B,C ഇവയിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിലാണോ, പുറത്താണോ, അകത്താണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

3) ചതുർഭുജം PQRS ൽ $\angle P + \angle R = 200^\circ$ ആകുന്നു. S ന്റെ സ്ഥാനം P,Q,R ഇവയിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിലാണോ പുറത്താണോ, അകത്താണോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക

ചാപഖണ്ഡനം

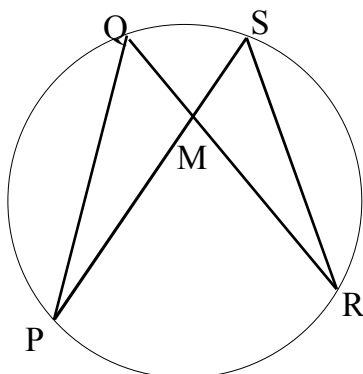
1)



ചിത്രത്തിൽ $\triangle AOB$, $\triangle COD$

ഇവ സദൃശമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

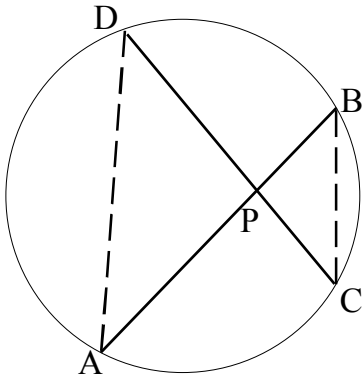
2)



ചിത്രത്തിൽ $\triangle PMQ$, $\triangle RMS$

ഇവ സദൃശമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

*



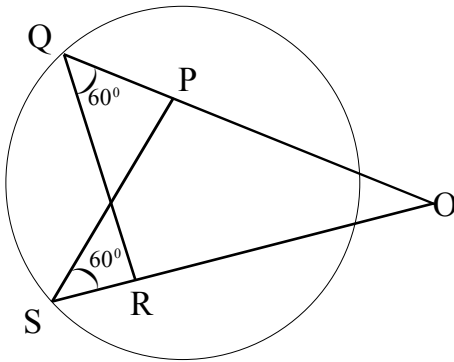
ചിത്രത്തിൽ AB, CD

എന്നീ ഞാണുകൾ P ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു
സദൃശ ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യകോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ് എന്ന വസ്തുത ഉപയോഗിച്ച്

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \quad \text{എന്ന് തെളിയിക്കാമല്ലോ}$$

(ഇതിന്റെ ഗുണന രൂപം $PA \times PB = PC \times PD$)

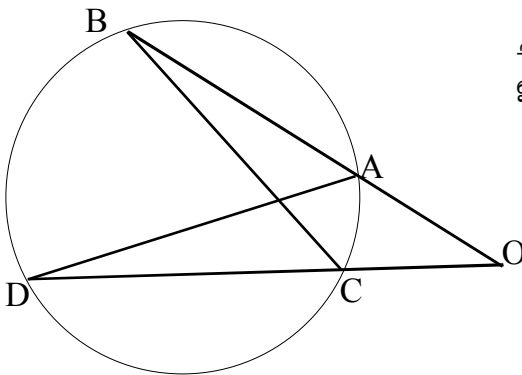
1



ചിത്രത്തിൽ $\triangle OQR$, $\triangle OSP$

ഇവ സദൃശമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

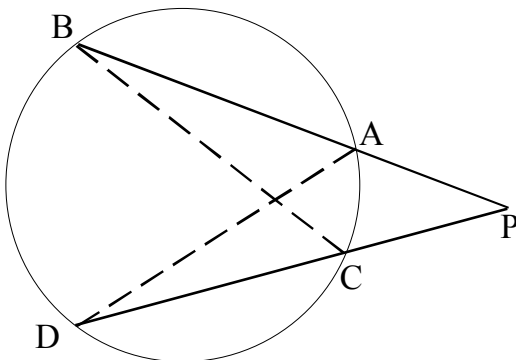
2



ചിത്രത്തിൽ $\triangle OBC$, $\triangle ODA$

ഇവ സദൃശമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

*



ചിത്രത്തിൽ BA, DC

എന്നീ ഞാണുകൾ നീട്ടി വെച്ച്, വൃത്തത്തിന് പുറത്ത് P ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു

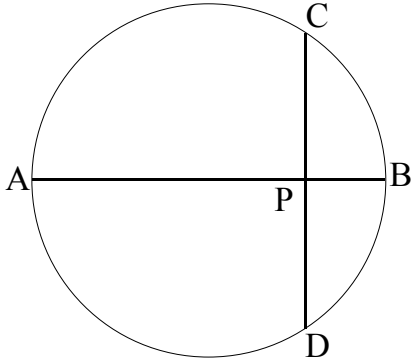
$\triangle PBC$ ൽ $\angle PCB$ യ്ക്കെതിരായ വശം ഏത് ?

$\triangle PDA$ ൽ $\angle PAD$ യ്ക്കെതിരായ വശം ഏത് ?

സദൃശത്രികോണുകളുടെ തുല്യകോണുകൾക്കെതിരായ വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ് എന്നതുകൊണ്ട്

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \quad \text{എന്ന് തെളിയിക്കാം}$$

(ഇതിന്റെ ഗുണന രൂപം $PA \times PB = PC \times PD$)



ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസം $CD \perp AB$

AB, CD ഇവ P ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നതുകൊണ്ട്

$$PA \times PB = PC \times PD$$

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബം

ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നതിനാൽ

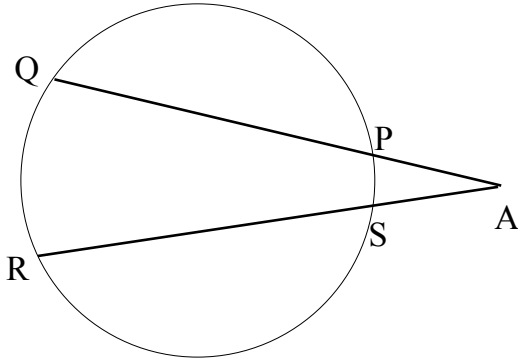
$$\text{അതുകൊണ്ട് } PA \times PB = PC^2$$

* വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസവും അതിനു ലംബമായ ഞാണും എടുത്താൽ, ഞാൺ വ്യാസത്തെ മുറിക്കുന്ന രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗമാണ്

1) ഒരു വൃത്തത്തിൽ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ P ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

$PA = 20 \text{ cm}$, $PB = 18 \text{ cm}$, $PC = 24 \text{ cm}$. അയാൽ PD എത്ര?

2)

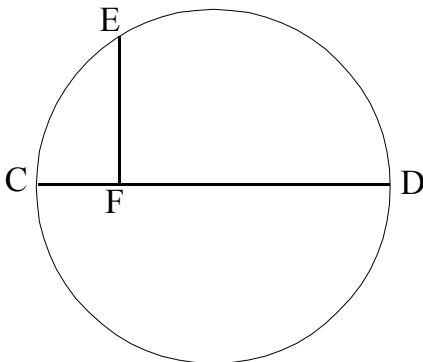


ചിത്രത്തിൽ $AP = 8 \text{ cm}$, $AQ = 18 \text{ cm}$

$AR = 16 \text{ cm}$.

അയാൽ AS എത്ര ?

2)



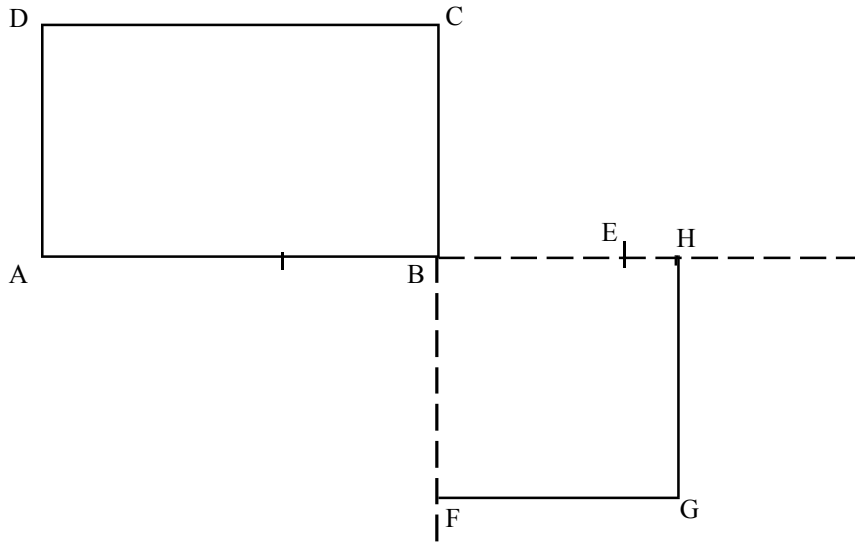
ചിത്രത്തിൽ CD വ്യാസമാണ്

$EF \perp CD$, $CF = 4 \text{ cm}$

$DF = 9 \text{ cm}$

അയാൽ EF എത്ര ?

- 4) $\sqrt{7}$ സെ.മി. നീളമുള്ള ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക
- 5) 12 ച.സെ.മി. പരപ്പുള്ളവുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക
- ചതുരത്തിന് തുല്യപരപ്പുള്ളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



* ചതുരം ABCD വരയ്ക്കുന്നു. AB എന്ന വശം നീട്ടിവെച്ച് അതിൽ $BE = BC$ ആകത്തക്കവിധം E അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. AE വ്യാസമായി അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. CB നീട്ടിവെച്ച് അർദ്ധവൃത്തത്തെ F ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. BF വശമായി സമചതുരം BFGH നിർമ്മിക്കുന്നു.

$$\begin{aligned}
 (\text{സമചതുരം BFGH ന്റെ പരപ്പളവ്}) &= BF^2 \\
 &= AB \times BF \\
 &= AB \times BC \\
 &= \text{ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്}
 \end{aligned}$$

ത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യപരപ്പുള്ളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

$\triangle ABC$ യുടെ അതേ പരപ്പുള്ളവുള്ള ചതുരം

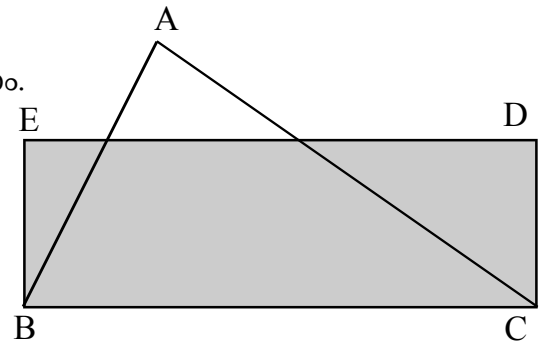
ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർമ്മിക്കാം.

(BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി AB യുടെ

മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്നു)

ചതുരം BCDE യുടെ

അതേ പരപ്പുള്ളവുള്ള സമചതുരം നിർമ്മിക്കാമല്ലോ

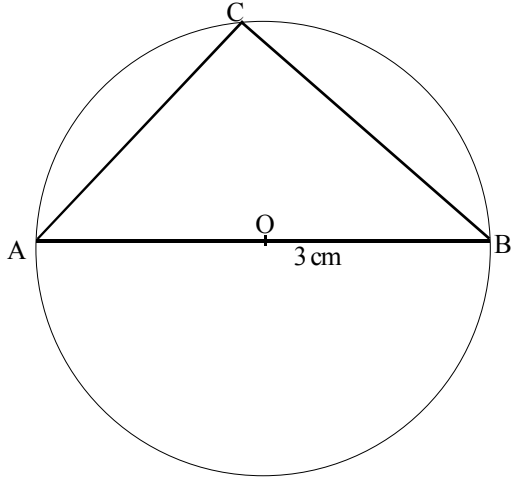


ചതുർഭുജത്തിന് തുല്യപരപ്പുള്ളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

ചതുർഭുജത്തിന് തുല്യപരപ്പുള്ളവുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ നിർമ്മിതി 9-ാം തരത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ത്രികോണത്തിന് തുല്യപരപ്പുള്ളവുള്ള ചതുരവും ചതുരത്തിന് തുല്യപരപ്പുള്ളവുള്ള സമചതുരവും വരയ്ക്കാം.

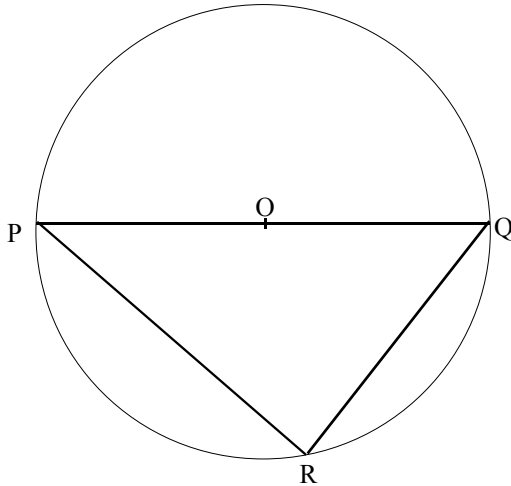
മുഖ്യനിർണ്ണയ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

1)



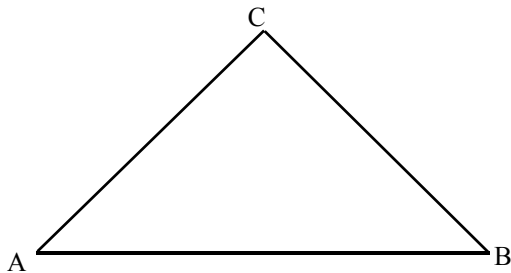
O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 3 സെ.മി.
ABC യിൽ $AC = BC$
എങ്കിൽ AC യുടെ നീളം എത്ര ?

2)



ചിത്രത്തിൽ O വൃത്ത കേന്ദ്രമാണ്.
 $\angle PQR = 50^\circ$ ആയാൽ $\angle QPR$ എത്ര ?

3)



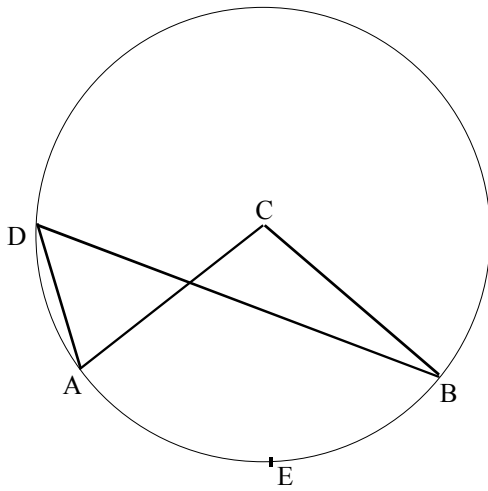
ചിത്രത്തിൽ $AC = BC$ ആണ്.
 $\angle A = 20^\circ$ ആയാൽ AB വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്നു.
വൃത്തത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി C യുടെ സ്ഥാനം എവിടെയായിരിക്കും ?

4)

$AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$, $AC = 10 \text{ cm}$

$\triangle ABC$ യിലെ AC വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി B യുടെ സ്ഥാനം എവിടെയാണ്. BC വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തെ അടിസ്ഥാനമായി A യുടെ സ്ഥാനം എവിടെയാണ് ?

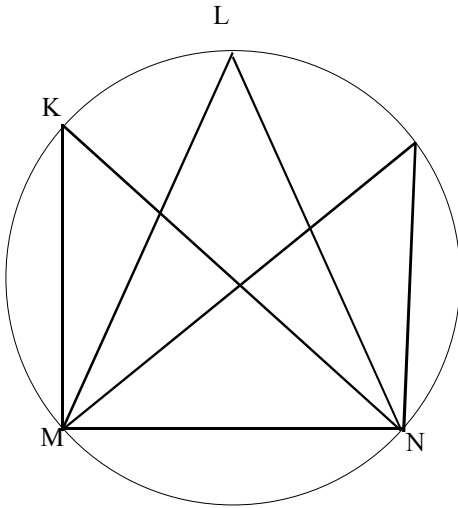
5)



ചിത്രത്തിൽ C വൃത്തകേന്ദ്രം. ചാപം AEB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ 70° ആയാൽ

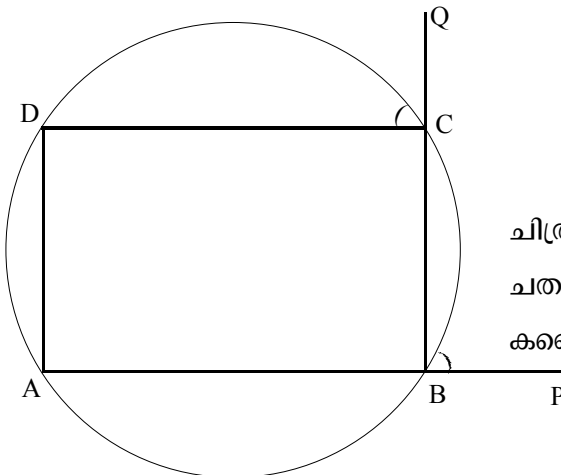
- (a) $\angle ADB$ എത്ര ?
- (b) $\angle CAB$ എത്ര ?
- (c) $\angle AEB$ എത്ര ?

6)



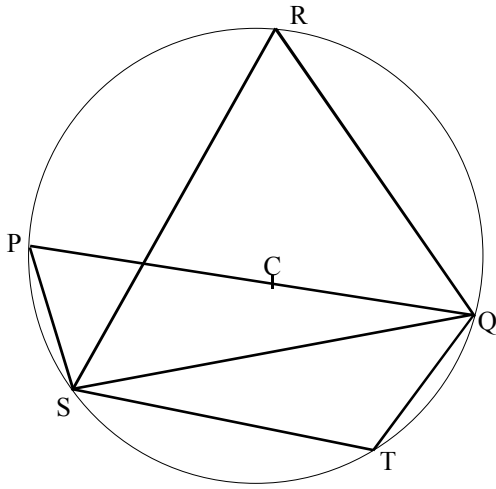
ചിത്രത്തിൽ $\triangle LMN$ ലെ മൂന്ന് കോണുകളും തുല്യമാണ്. എങ്കിൽ $\angle MPN$ എത്ര ?

7)



ചിത്രത്തിൽ $\angle CBP = 95^\circ$, $\angle DCQ = 80^\circ$
ചതുർഭുജം ABCD യുടെ എല്ലാ കോണുകളും കണ്ടെത്തുക

8)



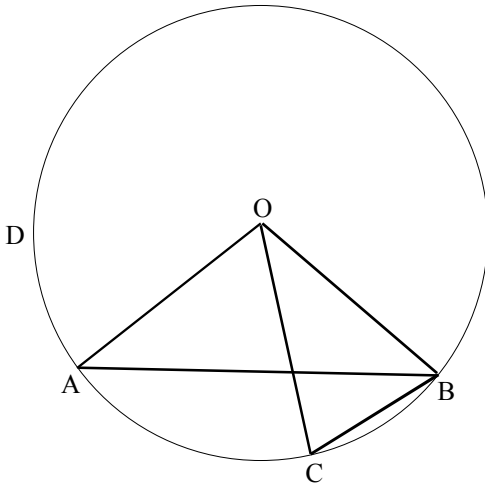
C കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ ST എന്ന ഞാൺ
PQ എന്ന വ്യാസത്തിന് സമാന്തരമാണ്
 $\angle QRS = 75^\circ$ ആണ്.

- (a) $\angle QCS$ എത്ര ?
- (b) $\angle CQS$ എത്ര ?
- (c) $\angle QST$ എത്ര ?

9)

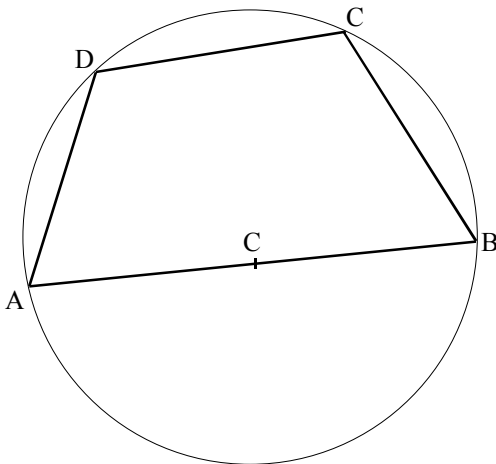
താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക
എ) ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 4 സെ.മീ.
ബി) രണ്ട് കോണുകൾ 50° , 70° വീതം

10)



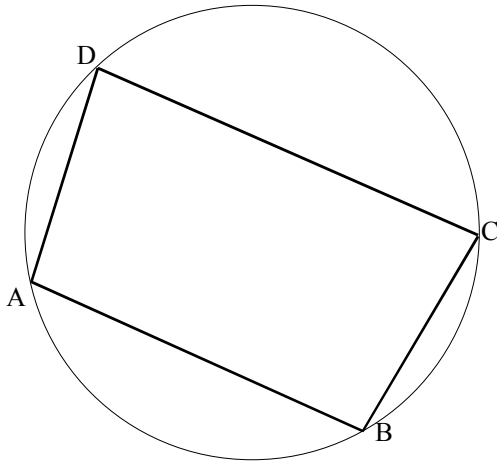
O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ $\angle LOAB = 20^\circ$ ആയാൽ
 $\angle LOCB = 55^\circ$ ആയാൽ
(a) $\angle LAOB$ എത്ര ?
(b) $\angle LAOC$ എത്ര ?

11)



ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും
 $\angle ADC = 130^\circ$ യും ആണ്.
 $\angle BAC$ കണക്കാക്കുക

12)

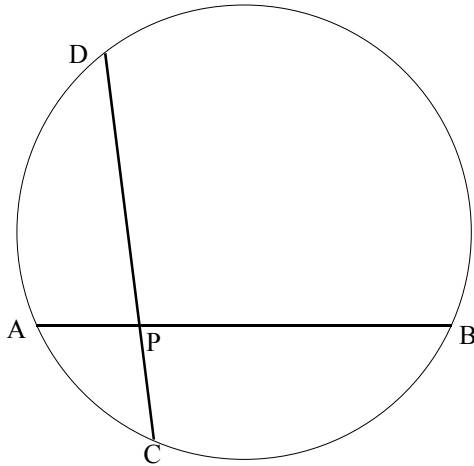


ചിത്രത്തിൽ $LA = 2x$, $LB = y - 10$, $LC = y - 40$, $LD = x + 20$ എന്നിങ്ങനെ ആകുന്നു.

ഇവയുടെ വില കാണുക

x, y ഇവയുടെ വില കാണുക

13)



ചിത്രത്തിൽ AB, CD എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് ഞാണുകളാണ്. ഇവ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ വെട്ടിക്കുന്നു.

$AB = 18$ cm, $PB = 12$ cm, $AC = 10$ cm

എങ്കിൽ PD, BD

എന്നിവ കണ്ടെത്തുക

14) ചതുർഭുജം ABCD യിൽ $AB = 6$ cm, $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $AD = 7$ cm, $BC = 5$ cm

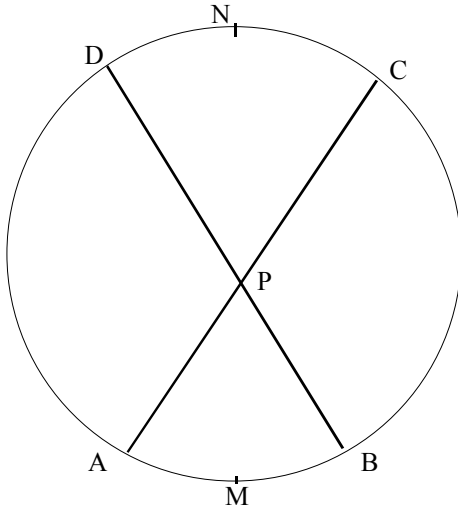
ചതുർഭുജം ABCD വരയ്ക്കുക.

ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ തുല്യപരപ്പുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

15) സമവാർശ്യത്രികോണം ABC യിൽ $\angle A = \angle B$ ആണ്. $AB = 5$ cm, $\angle A = 40^\circ$ ത്രികോണം വരച്ച്

അതിന് തുല്യപരപ്പുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുക

16)



ചാപം AMB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ 80°

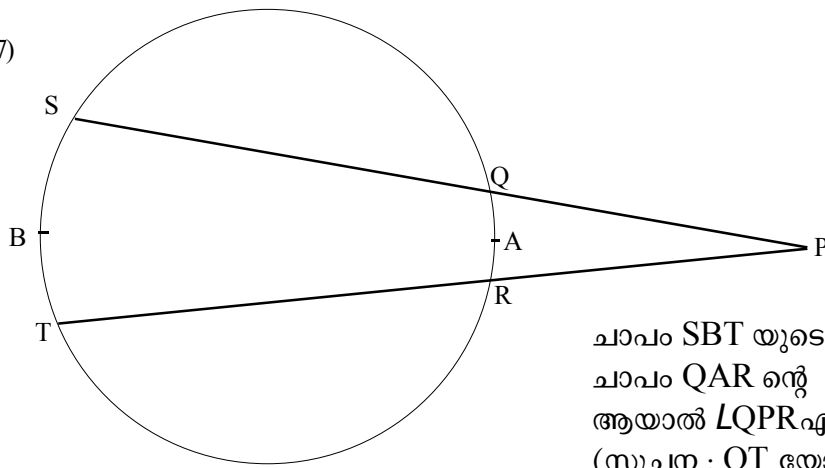
ചാപം CND യുടെ കേന്ദ്രകോൺ 50°

ആയാൽ $\angle APB$ എത്ര ?

(സൂചന : AD യോജിപ്പിക്കുക.

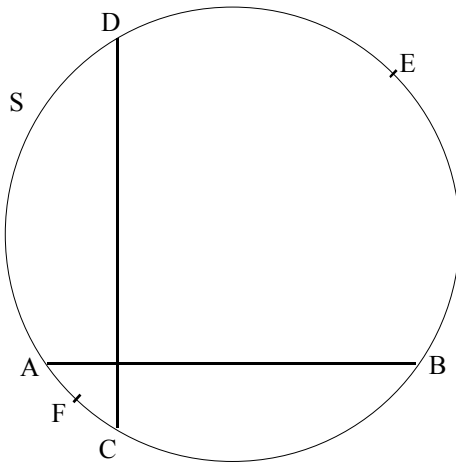
$\triangle PAD$ യുടെ ബാഹ്യകോണാണ് $\angle APB$)

17)



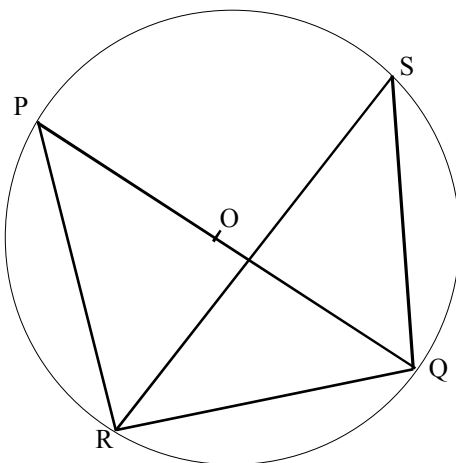
ചാപം SBT യുടെ കേന്ദ്രകോൺ 110°
 ചാപം QAR ന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 50°
 ആയാൽ $\angle QPR$ എത്ര ?
 (സൂചന : QT യോജിപ്പിക്കുക.
 $\triangle PQT$ യുടെ ബാഹ്യകോണാണ് $\angle SQT$)

18)



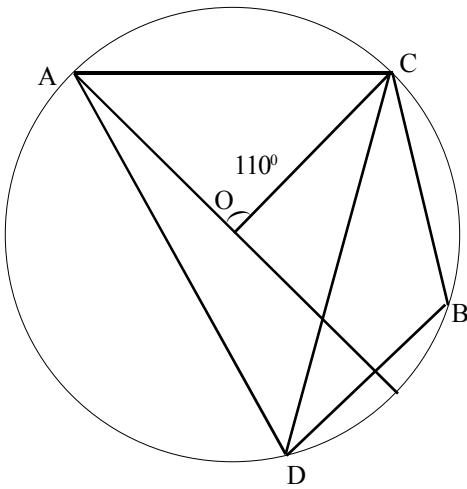
ചിത്രത്തിൽ $AB \perp CD$, ചാപം BED
 ചാപം AFC ഇവയുടെ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ
 തുക 180°
 എന്ന് തെളിയിക്കുക
 (സൂചന : AD വരയ്ക്കുക)

*



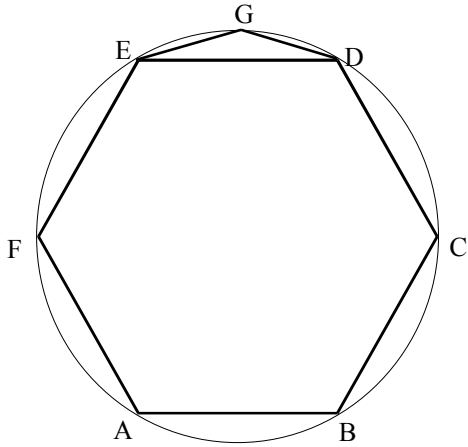
ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം.
 $\angle QSR = x^\circ$
 ആയാൽ $\angle LPQR$ എത്ര ?

*



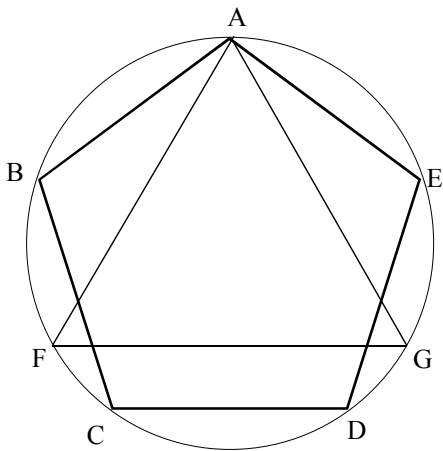
ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം.
 $\angle BAC, \angle ABC, \angle ADC$
 ഇവ കാണുക

*



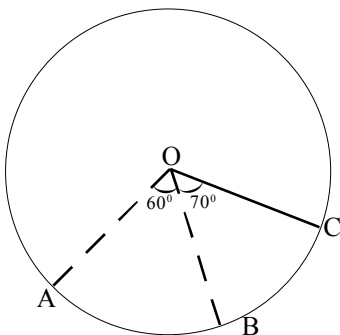
ചിത്രത്തിൽ ABCDEF ഒരു സമഷഡ്ഭുജമാണ്.
 $\angle EGD$ എത്ര ?

*



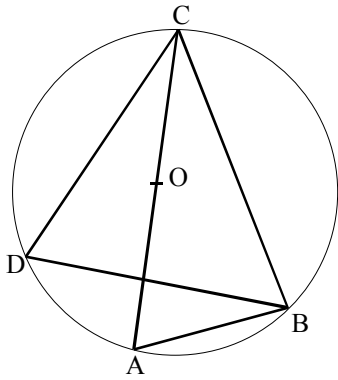
ചിത്രത്തിൽ ABCDEF ഒരു സമപഞ്ചഭുജവും AFG ഒരു സമഭുജത്രികോണവുമാണ്.
 AB, BF, FC, ABF എന്നീ ചെറിയ ചാപങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക

*



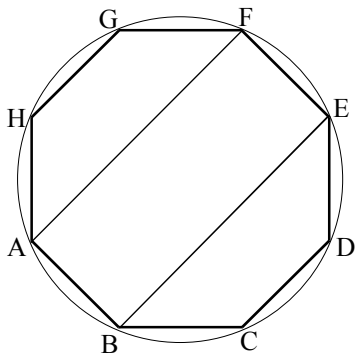
ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രമാണ്.
 $\angle AOB = 60^\circ$
 $\angle BOC = 70^\circ$ $\triangle ABC$ വരച്ചാൽ
 $\angle ABC$ എത്ര ?
 $\angle BAC$ എത്ര ?
 $\angle ACB$ എത്ര ?

*



ചിത്രത്തിൽ തുല്യ അളവുകളുള്ള കോണുകൾ ജോഡിയായി എഴുതുക

*

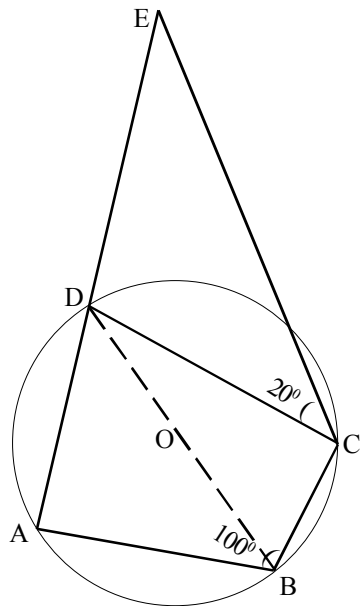


ചിത്രത്തിൽ അഷ്ടഭുജത്തിലെ എല്ലാ ശീർഷങ്ങളും ഒരേ വൃത്തത്തിലാണ്.

$$\angle A + \angle C + \angle E + \angle G = \angle B + \angle D + \angle F + \angle H$$

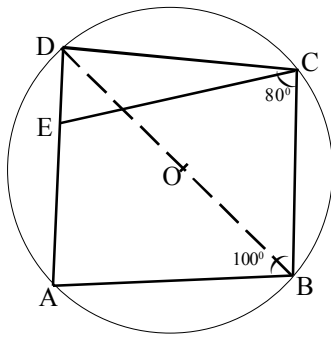
എന്ന് തെളിയിക്കുക

*



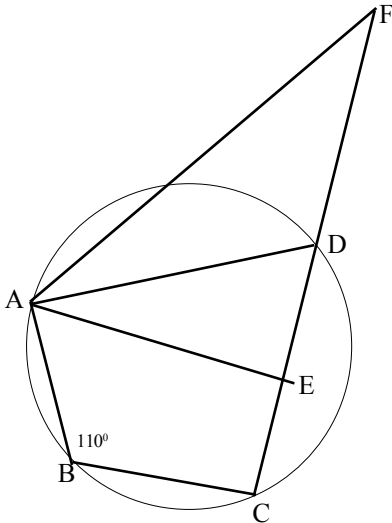
ചിത്രത്തിൽ ചതുർഭുജം ABCD ചക്രിയ ചതുർഭുജമാണ്. O വൃത്തകേന്ദ്രം വശം AD, E യിലേക്ക് നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. ചതുർഭുജം ABCD യിലെ എല്ലാ കോണുകളും കണ്ടുപിടിക്കുക. LAEC കാണുക

*



ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം
 $\angle B = 100^\circ$
 $\angle BCE = 80^\circ$ ചതുർഭുജം ABCE യിലെ
 എല്ലാ കോണുകളും കാണുക
 $\triangle CED$ യിലെ എല്ലാ കോണുകളും കാണുക

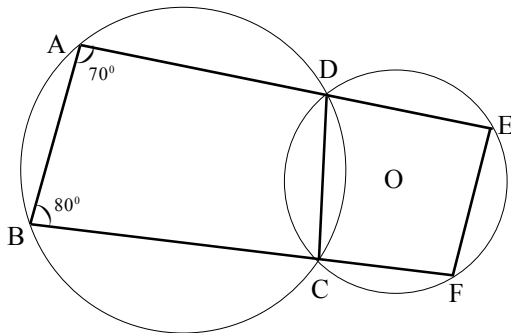
*



ചിത്രത്തിൽ $\angle B = 110^\circ$ വൃത്തകേന്ദ്രം
 $\angle AEC, \angle ADC, \angle AFC$ ഇവയുടെ അളവ് $50^\circ, 80^\circ, 70^\circ$,
 എന്നിങ്ങനെയാണ്. കോണിന്റെ പേരിന്റെ ക്രമത്തിൽ
 ലല്ല. അവയുടെ അളവ് തന്നിരിക്കുന്നത്. എങ്കിൽ

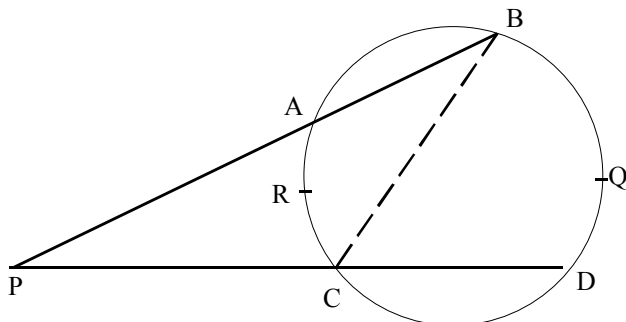
$\angle AEC$	=	
$\angle ADC$	=	
$\angle EAD$	=	
$\angle DAF$	=	

*



രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ C,D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ
 ഖണ്ഡിക്കുന്നു.
 A,D,E ഇവ ഒരേ രേഖയിലാണ്. അതുപോലെ
 B,C,F എന്നിവയും. രണ്ട് ചതുർഭുജങ്ങളിലെ
 എല്ലാ ശീർഷങ്ങളിലെയും കോണുകൾ കണ്ടു
 പിടിക്കുക

*



ചിത്രത്തിൽ ചാപം BQD യുടെ കേന്ദ്ര
 കോൺ 100° യും ചാപം ARC യുടെ
 കേന്ദ്രകോൺ 80° യും ആയാൽ
 $\angle P$ കാണുക

രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

ആമുഖം

ഗണിത പ്രശ്നപരിഹാരത്തിന് (അജ്ഞാതസംഖ്യ കണ്ടെത്തുന്നതിന്) ബീജഗണിതത്തിന്റെ സാധ്യതകൾ കുട്ടികൾ ഇതിനോടകം പരിചയപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. വിപരീത ക്രിയകൾ വഴി മനക്കണക്കായി പ്രശ്ന പരിഹാരം കണ്ടെത്താമെന്നും ഇതിന് പ്രയാസം നേരിടുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിച്ച് ലഘൂകരണം വഴി അജ്ഞാതസംഖ്യയിൽ എത്തിച്ചേരാമെന്നും അവർ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അജ്ഞാതസംഖ്യയുടെ ഒന്നാം കൃതി മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യങ്ങളാണ് ഇതുവരെയുള്ള ക്ലാസ്സുകളിൽ അവതരിപ്പിച്ചത്. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ അജ്ഞാതസംഖ്യകളുടെ രണ്ടാം കൃതി കൂടി ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യങ്ങളും അവയുടെ പരിഹാര മാർഗങ്ങളുമാണ് പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. പ്രശ്ന വിശകലനം നടത്തി അതിനെ ഗണിതപരമായി ചുരുക്കി എഴുതാൻ (ബീജഗണിത വാക്യ രൂപീകരണം) കുട്ടികൾ നേടിയ ശേഷികൾ കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെടുത്താനുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങൾ അവതരിപ്പിക്കേണ്ടതുണ്ട്. പ്രശ്നങ്ങളുടെ പ്രത്യേകത അനുസരിച്ച് വിവിധ പരിഹാരമാർഗങ്ങളിൽ അനുയോജ്യമായത് സ്വീകരിക്കാൻ കുട്ടികൾക്ക് സാധിക്കണം. രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരത്തിൽ വർഗമൂലം കാണുന്ന പ്രക്രിയ സ്വാഭാവികമായും കടന്നുവരും. ഏത് അധിസംഖ്യക്കും രണ്ട് വർഗമൂലങ്ങൾ ഉള്ളതിനാൽ അജ്ഞാതസംഖ്യക്ക് രണ്ട് വിലകൾ വരെ കിട്ടിയേക്കാം. ഇവയിൽ യുക്തമായ പരിഹാരമാണ് സ്വീകരിക്കേണ്ടത്. ചില സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരമുണ്ടെങ്കിലും പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് അവ പരിഹാരമല്ലാതെ വരാം. ഒരു സമവാക്യം തന്നെ വിവിധ പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരത്തിന് സഹായകരമാകാം. ഈ പാഠപുസ്തകത്തിലെ തന്നെ മറ്റ് അധ്യായങ്ങളിലെ ഗണിതപ്രശ്നപരിഹാരത്തിനും മറ്റു വിഷയങ്ങളിലെ ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരത്തിനും ഈ അദ്ധ്യായം സഹായകമാവുന്നുണ്ട്. കൂടാതെ സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും ചർച്ച ചെയ്യപ്പെടുന്നുണ്ട്.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- * രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപീകരണം
- * രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങൾക്ക് രണ്ട് പരിഹാരങ്ങൾ വരെ ഉണ്ടാവാം
- * പൂർണ്ണവർഗ രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം
- * വർഗത്തികവ്
- * $ax^2+bx+c=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- * $ax^2+bx+c=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ b^2-4ac (വിവേചകം) യുടെ പ്രസക്തി അഥവാ വിവേചകത്തിന്റെ വിലയും പരിഹാരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
- * രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങളും രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

പഠന പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- * 48 സെ.മി. ചുറ്റളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്ത് ?
ഇതേ ചുറ്റളവുള്ള സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക. ഇതേ ചുറ്റളവുള്ള സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ വശമോ ?

- * ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 80 സെ.മി., വീതി 12 സെ.മി., എങ്കിൽ നീളം എന്ത് ?
ഇതേ ചുറ്റളവുള്ള മറ്റൊരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതിയേക്കാൾ 10 സെ.മി. കൂടുതലാണ്. ആ ചതുരത്തിന്റെ വീതി എന്ത് ? നീളം എന്ത് ?
 - * തുടർച്ചയായ രണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക 25. സംഖ്യകൾ ഏവ ?
 - * തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക 36. സംഖ്യകൾ ഏവ?
 - * 81 ച.സെ.മി. പരപ്പുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്ത് ?
 - * ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം 81 ആയാൽ സംഖ്യയേത്?
 - * ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തോട് 6 കൂട്ടിയപ്പോൾ 150 കിട്ടി. സംഖ്യയേത്?
 - * ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനേക്കാൾ 60 ച.സെ.മി. കൂടുതലാണ് ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 285 ച.സെ.മി. എങ്കിൽ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമെന്ത് ?
 - * ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിന്റെ 3 മടങ്ങിൽ നിന്ന് 2 കുറച്ചാൽ 190 കിട്ടും. സംഖ്യ ഏത് ?
 - * ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തേക്കാൾ 3 സെ.മി. കൂടുതൽ വശമുള്ള മറ്റൊരു സമചതുരത്തിന് 400 ച.സെ.മി. പരപ്പളവുണ്ട്. ആദ്യ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്ത് ?
 - * ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ 20 സെ.മി. കൂടുതൽ ചുറ്റളവുള്ള മറ്റൊരു സമചതുരത്തിന് 144 ച.സെ.മി. പരപ്പളവുണ്ട്. ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശമെന്ത് ?
ഈ പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം മനക്കണക്കായോ സമവാക്യം രൂപീകരിച്ചോ കുട്ടികൾ കണ്ടുപിടിക്കട്ടെ. (മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിച്ച പരിഹാരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിച്ചും കണ്ടുപിടിച്ചു നോക്കട്ടെ)
(ഈ സമവാക്യങ്ങളിൽ ഒന്നാം കൃതിയായവ, രണ്ടാം കൃതിയായവ വേർതിരിക്കട്ടെ.)
- സൂചന : സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 81 ച.സെ.മി.എങ്കിൽ വശം = 9 സെ.മി. സംഖ്യയുടെ വർഗം 81 ആയാൽ സംഖ്യ +9 അല്ലെങ്കിൽ -9 ആകാം. പക്ഷെ സമചതുരത്തിന്റെ വശം -9 ആവില്ലല്ലോ

സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുക

	Set 1		Set 2
*	$x^2 = 25$	*	$x^2 + 1 = 50$
*	$3x^2 = 108$	*	$x^2 + 5 = 86$
*	$\frac{1}{2}x^2 = 98$	*	$x^2 - 3 = 118$
*	$\frac{4}{5}x^2 = 180$	*	$2x^2 + 1 = 19$
*	$\frac{8}{3}x^2 = 96$	*	$5x^2 - 3 = 77$

Set 3

$$\begin{aligned} * \quad (x+1)^2 &= 25 \\ * \quad (x+3)^2 &= 64 \\ * \quad (x+7)^2 &= 225 \end{aligned}$$

Set 4

$$\begin{aligned} * \quad (x-1)^2 &= 16 \\ * \quad (x-3)^2 &= 49 \\ * \quad (x-7)^2 &= 625 \end{aligned}$$

Set 5

$$\begin{aligned} * \quad (2x+1)^2 &= 81 \\ * \quad (3x+2)^2 &= 64 \\ * \quad (5x+3)^2 &= 324 \end{aligned}$$

Set 6

$$\begin{aligned} * \quad (2x-1)^2 &= 49 \\ * \quad (3x-2)^2 &= 169 \\ * \quad (5x-3)^2 &= 289 \end{aligned}$$

WORK SHEET**Set 1**

$$\begin{aligned} * \quad x^2+8x+16 &= (x+4)^2 \\ * \quad x^2+16x+64 &= (\dots+\dots)^2 \\ * \quad x^2-10x+25 &= (\dots-\dots)^2 \\ * \quad x^2+2x+1 &= \dots \end{aligned}$$

Set 2

$$\begin{aligned} * \quad x^2+3x+\frac{9}{4} &= \dots \\ * \quad m^2-7m+\frac{9}{64} &= \dots \\ * \quad a^2-\frac{3a}{4}+4 &= \dots \\ * \quad x^2-\frac{5x}{7}+\frac{25}{196} &= \dots \end{aligned}$$

Set 3

$$\begin{aligned} * \quad 4x^2+28x+49 &= \dots \\ * \quad 25y^2+90y+81 &= \dots \\ * \quad \frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{4}{9} &= \dots \end{aligned}$$

Set 4

$$\begin{aligned} * \quad \frac{4}{9}y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{16} &= \dots \\ * \quad \frac{9}{25}x^2-x+\frac{25}{36} &= \dots \\ * \quad \frac{x^2}{16}-\frac{5x}{4}+\frac{25}{4} &= \dots \end{aligned}$$

WORK SHEET

പൂരിപ്പിക്കുക

* $a^2 + 2ab + b^2 = (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots)^2$

* $k^2 + 5k + \dots\dots\dots = (k + \frac{5}{2})^2$

* $a^2 - 2ab + b^2 = (\dots\dots - \dots\dots)^2$

* $p^2 - 13p + \dots\dots\dots = (p + \frac{13}{2})^2$

* $x^2 + 10x + \dots\dots\dots = (x + 5)^2$

* $x^2 + x + \dots\dots\dots = (x + \frac{1}{2})^2$

* $a^2 - 10a + \dots\dots\dots = (a - 5)^2$

* $x^2 - \frac{1}{2}x + \dots\dots\dots = (x - \frac{1}{4})^2$

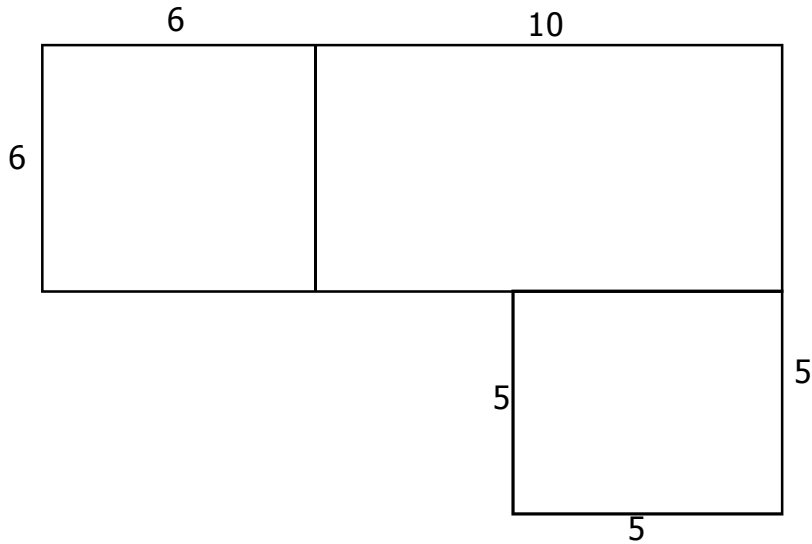
* $y^2 + 8y + \dots\dots\dots = (y + 4)^2$

* $a^2 + \frac{7}{3}a + \dots\dots\dots = (a + \frac{7}{6})^2$

* $x^2 - 6x + \dots\dots\dots = (x - 3)^2$

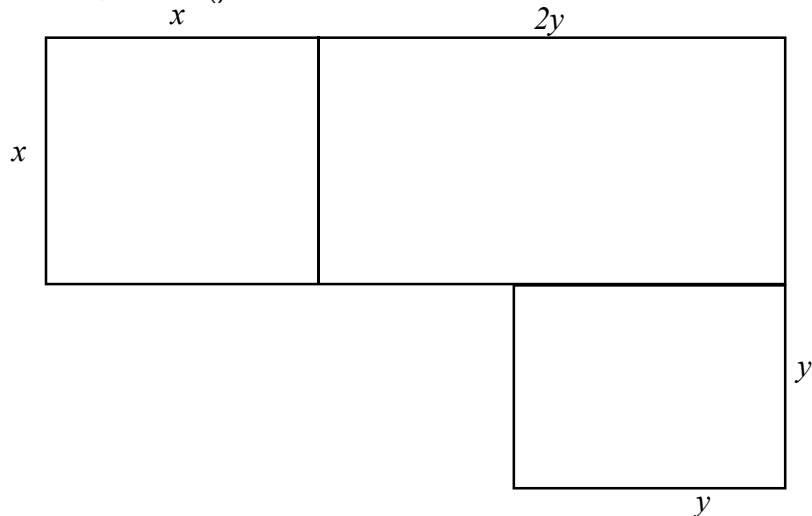
* $x^2 - \frac{5}{4}x + \dots\dots\dots = (x - \frac{5}{8})^2$

സമചതുര നിർമ്മാണം



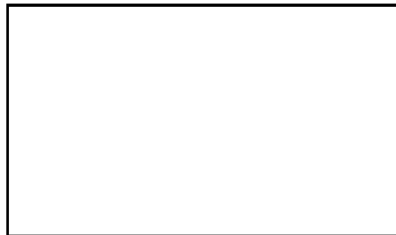
ഈ രൂപം രണ്ടായി മുറിച്ച് ചേർത്ത് വെച്ച് സമചതുരം നിർമ്മിക്കാമോ ? നിർമ്മിച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശം എന്ത്?

ഇനി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രൂപം രണ്ടായി മുറിച്ച് ചേർത്തുവെച്ച് സമചതുരം ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ. സമചതുരത്തിന്റെ വശം എന്ത് ?

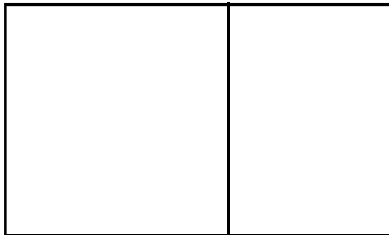


വർഗ്ഗത്തികവ്

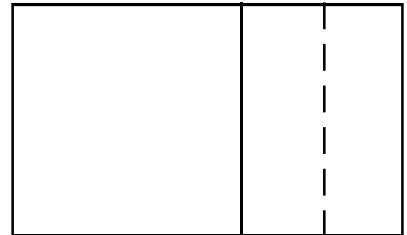
ചതുരാകൃതിയായ ഒരു കടലാസ് എടുക്കുക. ചതുരത്തിന്റെ വീതി, വശമായി വരുന്ന സമചതുരം അതിൽ നിന്നും മുറിച്ചു മാറ്റുന്നു. ശേഷിക്കുന്ന ചതുരത്തെ ചിത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ട് തുല്യചതുരങ്ങളായി മുറിക്കുന്നു. ഇവ മുറിച്ചുമാറ്റിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽ ചേർത്തുവെക്കുക. വലിയ സമചതുരം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് ഒരു മൂലയിൽ ചെറിയൊരു സമചതുരം കൂടി ചേർത്തു വെക്കേണ്ടതുണ്ടല്ലോ....



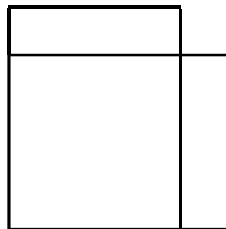
(1)



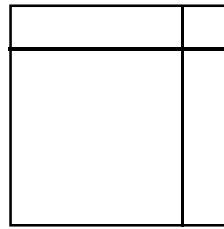
(2)



(3)



(4)



(5)

ക്രമ നമ്പർ	നീളവും വീതിയും	ചേർത്തുവെക്കേണ്ട ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്
1	നീളം, വീതിയേക്കാൾ 2 സെ.മി. കൂടുമ്പോൾ	
2	നീളം വീതിയേക്കാൾ 6 സെ.മി. കൂടുതൽ	
3	നീളം വീതിയേക്കാൾ 10 സെ.മി. കൂടുതൽ	
4	നീളം വീതിയേക്കാൾ 12 സെ.മി. കൂടുതൽ	
5		

നീളം, വീതിയേക്കാൾ 6 സെ.മി. കൂടുതലായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 55 ച.സെ.മി. ആയാൽ വീതിയെന്ത് ?

$$\begin{aligned}
 &\text{മൂലയിൽ ചേർത്തുവെക്കേണ്ട സമചതുരത്തിന്റെ വശം} &= & 3 \text{ സെ.മി.} \\
 &\text{അതിന്റെ പരപ്പളവ്} &= & 9 \text{ ച.സെ.മി} \\
 &\text{വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്} &= & 55 + 9 \\
 & &= & 64 \text{ ച.സെ.മി.} \\
 &\text{വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശം} &= & 8 \text{ സെ.മി.}
 \end{aligned}$$

ആദ്യ ചതുരത്തിന്റെ വീതി	=	8 - 3
	=	5 സെ.മി.
ഈ പ്രശ്നം ബീഗണിത രീതിയിൽ ചിന്തിച്ചാൽ ചതുരത്തിന്റെ വീതി	=	x സെ.മി.
നീളം	=	
നീളം	=	
പരപ്പളവ്	=	
	=	55
$(x+6) x$	=	
.....	=	55 + 9 = 64
x^2+6x+9		
$(x+3)^2$	=	64
$x+3$	=	$\pm$
x	=	$\pm$ - 3
x	=	 അല്ലെങ്കിൽ
(ഈ പ്രശ്നത്തിൽ x ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലയേത് ? എന്തുകൊണ്ട് ?)		

വിവേചനം

60 സെ.മി. വീതം നീളമുള്ള കമ്പി വളച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പരപ്പളവുകളുള്ള ചതരും ഉണ്ടാക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു.

*	പരപ്പളവ്	200 ച.സെ.മി.
*	പരപ്പളവ്	216 ച.സെ.മി.
*	പരപ്പളവ്	225 ച.സെ.മി.
*	പരപ്പളവ്	250 ച.സെ.മി.

ഓരോ സന്ദർഭത്തിനനുസരിച്ചും സമവാക്യം രൂപീകരിച്ച് ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും കണ്ടെത്താമോ ?

സമവാക്യങ്ങൾ വിവേചിച്ച് അറിയുന്നതിന് 'വിവേചകം' സഹായിക്കുന്നു എന്ന വസ്തുത ഈ പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ ബോധ്യപ്പെടുത്താമല്ലോ.

$ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിൽ

$b^2-4ac > 0$ ആയാൽ 2 വ്യത്യസ്ത പരിഹാരങ്ങൾ

$b^2-4ac = 0$ ആയാൽ ഒരു പരിഹാരം മാത്രം

$b^2-4ac < 0$ ആയാൽ പരിഹാരം ഇല്ല

രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളും രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങളും തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധം

Eg.: 1

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + 6x + 9 \\ P(-3) &\text{ ആയാൽ} \\ P(x) &= x^2 + 6x + 9 \\ P(-3) &= (-3)^2 + 6(-3) + 9 \\ &= 9 - 18 + 9 \\ &= 0 \\ \therefore P(-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{പരിഹാരം കാണുക} \\ x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ a = 1 \quad b = 6 \quad c &= 9 \\ b^2 - 4ac &= 6^2 - 4 \times 1 \times 9 \\ &= 36 - 36 \\ &= 0 \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-6}{2} = -3 \\ &\text{പരിഹാരം} = -3 \end{aligned}$$

Eg.: 2

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 3x - 10 \text{ ആയാൽ} \\ P(5), P(-2) &\text{ എന്നിവ കാണുക} \\ P(x) &= x^2 - 3x - 10 \\ P(5) &= (5)^2 + 3(5) - 10 \\ &= 25 - 15 - 10 \\ &= 0 \\ \therefore P(5) &= 0 \\ P(-2) &= (-2)^2 - 3(-2) - 10 \\ &= 4 + 6 - 10 \\ &= 0 \\ \therefore P(-2) &= 0 \end{aligned}$$

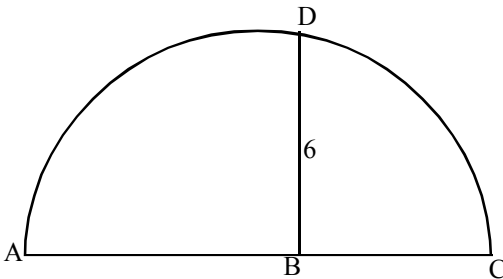
$$\begin{aligned} &\text{പരിഹാരം കാണുക} \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \text{ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ} \\ &\text{പരിഹാരം കാണുക} \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ a = 1 \quad b = -3 \quad c &= -10 \\ \text{വിവേചകം} &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 3 \times 1 \times -10 \\ &= 9 + 40 = 49 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \times 1} \\ &= \frac{3 \pm 7}{2} \\ \frac{3+7}{2} &\text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{3-7}{2} \\ \frac{10}{2} &\text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{-4}{2} \\ 5 &\text{ അല്ലെങ്കിൽ } -2 \\ \text{പരിഹാരം } 5 &\text{ അല്ലെങ്കിൽ } -2 \end{aligned}$$

ASSIGNMENT

	<u>ബഹുപദത്തിന്റെ വില</u>	<u>പരിഹാരം കാണുക</u>
1)	$P(x) = x^2 - 10x + 25$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $P(5)$ കാണുക	$x^2 - 10x + 25 = 0$
2)	$a^2 + 8a + 16$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $P(-4)$ കാണുക	$a^2 + 8a + 16 = 0$
3)	$P^2 - 5P + 6 - 6P(2)$ $P(3)$ ഇവ കാണുക	$P^2 - 5P + 6 = 0$
4)	$x^2 + 4x - 21$ ൽ $P(3), P(-7)$ ഇവ കാണുക	$x^2 + 4x - 21 = 0$
5)	$x^2 + 7x + 10$ ൽ $P(-2), P(-5)$ ഇവ കാണുക	$x^2 + 7x + 10 = 0$
6)	$6x^2 + x - 1$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $P(\frac{1}{3}), P(-\frac{1}{2})$ ഇവ കാണുക	$6x^2 + x - 1 = 0$

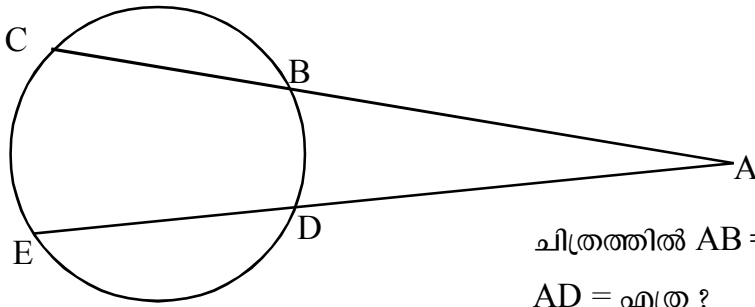
കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം 6 , അവയുടെ ഗുണനഫലം 315. സംഖ്യകളേവ?
2. രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുക 30, അവയുടെ ഗുണനഫലം 161. സംഖ്യകളേവ ?
3. ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും യഥാക്രമം 50 സെ.മി., 40 സെ.മി. എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇവ രണ്ടും തുല്യമായി വർദ്ധിപ്പിച്ചപ്പോൾ പരപ്പളവിൽ 1000 ച.സെ.മി. വർദ്ധനവ് ഉണ്ടായി. എങ്കിൽ എത്ര യൂണിറ്റ് വർദ്ധിപ്പിച്ചു.?
4. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം 5 സെ.മി. വർദ്ധിപ്പിക്കുകയും സമീപവശം 2 സെ.മി. കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്തപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 260 ച.സെ.മി. ആയാൽ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര ?
5. ഷേർലിക്ക് ലീലാമ്മയേക്കാൾ 7 വയസ് പ്രായം കൂടുതൽ, ശ്രീഷയ്ക്ക് ലീലാമ്മയേക്കാൾ 2 വയസ് കുറവ്, ഷേർലിയുടെയും ശ്രീഷയുടെയും വയസുകൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ 136 കിട്ടും. എങ്കിൽ ഷേർലിയുടെയും ശ്രീഷയുടെയും വയസുകളുടെ വ്യത്യാസം എത്ര ? ലീലാമ്മയുടെ വയസ് എത്ര?
6. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ തുടർച്ചയായ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 231, ഇതിലെ മദ്ധ്യപദം 7 ആയാൽ മറ്റുപദങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.
7. ഒന്നു മുതൽ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ കണ്ട് പിടിക്കുന്ന ഘട്ടത്തിൽ തുക 1830 കിട്ടി. എങ്കിൽ എത്ര എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യ ?
8. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം അതിന്റെ പാദത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങിനേക്കാൾ ഒരു യൂണിറ്റും, ലംബം പാദത്തിനേക്കാൾ 7 യൂണിറ്റും കൂടുതലാണ്. എങ്കിൽ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.
9. $x^2+10x+p=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ 2 പരിഹാരങ്ങളും ഒരേ സംഖ്യതന്നെയായാൽ P യുടെ വില എത്ര?
10. ചതുരം കൃതിയായ സ്ഥലത്തിന് 160 മീ. ചുറ്റളവുണ്ട്. അതിനകത്ത് 1500 ച.മീ. വലുപ്പത്തിൽ ഒരു കുളവും ഉണ്ട്. ബാക്കിയുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെയും കുളത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് തുല്യമായാൽ സ്ഥലത്തിന്റെ വീതിയെത്ര ?
11. ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം വീതിയുടെ 3 മടങ്ങിനേക്കാൾ 3 യൂണിറ്റ് കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ വികർണ്ണം നീളത്തേക്കാൾ ഒരു യൂണിറ്റ് കൂടുതലാണ്. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക ?
12. 60 സെ.മി. നീളമുള്ള കമ്പി വളച്ച് മട്ടത്രികോണമാക്കുന്നു. ഇതിന്റെ കർണ്ണം 26 സെ.മി. ആയാൽ മറ്റ് രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക ?
13. ചിത്രത്തിൽ AC വ്യാസം ആണ്. BD=6 cm, BC യുടെ നീളം AC യേക്കാൾ 5 cm കുറവാണ്. ABയുടെ നീളം എത്ര?



വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര ?

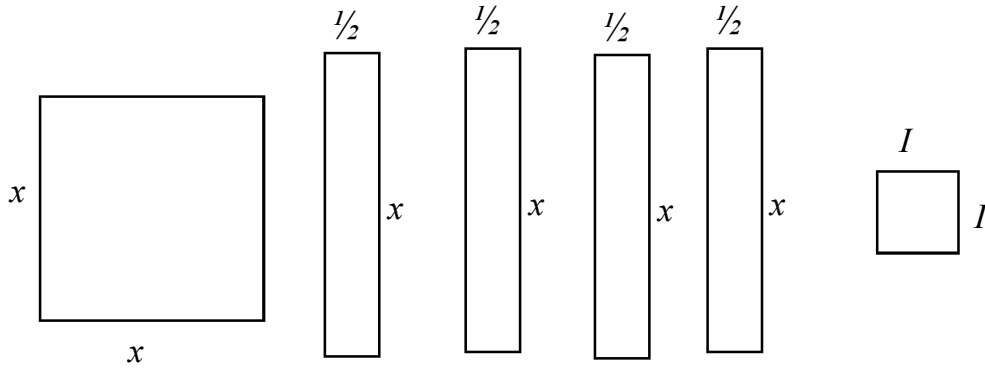
14.



ചിത്രത്തിൽ $AB = 8$, $BC = 10$, $DE = 7$,
 $AD =$ എത്ര ?

15. തുടർച്ചയായ 2 എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക 113, തുടർന്ന് വരുന്ന 2 എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ എഴുതുക?
16. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ നീളം $(4x-2)$. വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം $(10x-2)$ തൊടുവരയുടെ നീളം $(9x-2)$ ഇവയെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഒരു സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക. ആരം, തൊടുവര എന്നിവയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക?
17. ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $1\frac{1}{4}$ ആവില്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.
18. രണ്ട് സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 2. ഇവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $\frac{2}{63}$ ഈ വസ്തുതയെ $ax^2+bx+c=0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യമാക്കി മാറ്റുക. സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.
19. ഒരു വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $AB = 18\text{cm}$, $PD = 7\text{cm}$, $CP = 8\text{cm}$ ആയാൽ PB എത്ര?
20. 20 മീ നീളവും 12 മീ വീതിയും ഉള്ള ചതുരാകൃതിയായ ഒരു ഹാളിന്റെ ഒരു ഭാഗത്തായി ചതുരാകൃതിയിലുള്ള കലയാണ മണ്ഡപം ഉണ്ട്. മണ്ഡപത്തിന്റെ നീളം, വീതി എന്നിവ 3: 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. കലയാണ മണ്ഡപം ഒഴികെയുള്ള ഹാളിന്റെ പരപ്പളവ് 216 ച.മീ ആയാൽ കലയാണ മണ്ഡപത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്ര ?
21. $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ എന്നത് t സെക്കന്റിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യമാണ് $u = 8\text{ m/s}$, $a = 10\text{ m/s}^2$, $S=49\text{ m}$. എങ്കിൽ t യുടെ വില കാണുക
22. ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ആരത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങിനോട് രണ്ട് കൂട്ടിയാൽ അതിന്റെ ഉന്നതി കിട്ടും. ഇതിന്റെ ചരിവ് ഉയരം 13 സെ.മി. ആയാൽ സ്തൂപികയുടെ വ്യാസം എത്ര?
23. ഒരാൾ ബാങ്കിൽ നിന്നും ഒരു തുക കടം വാങ്ങി. ആദ്യമാസം 4000 രൂപയും തുടർന്ന് വരുന്ന ഓരോ മാസവും തൊട്ടു മുന്നിലെ മാസം അടച്ചതിനേക്കാൾ 50 രൂപ കൂടുതലും അടച്ച് കൊണ്ടിരുന്നു. അവസാന മാസം 5450 രൂപ അടച്ചപ്പോൾ അയാളുടെ കടം തീർന്നു. ആദ്യത്തെ 4 മാസം അടച്ച രൂപ എത്ര വീതമാണ് ? കടം തീരാൻ എത്ര മാസം വേണ്ടി വന്നു ? ആകെ അടച്ച തുക എത്ര ?
24. ഒരു ജോലി ചെയ്ത് തീർക്കാൻ a യ്ക്ക് b യേക്കാൾ 5 ദിവസം കുറച്ചു മതി. രണ്ടുപേരും കൂടി ഒരു മിച്ച് ജോലി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ 6 ദിവസം കൊണ്ട് ആ ജോലി തീരും. എന്നാൽ a യ്ക്കും b യ്ക്കും തനിച്ച് ആ ജോലി ചെയ്ത് തീർക്കാൻ എത്ര ദിവസം വീതം വേണ്ടി വരും ?

25.

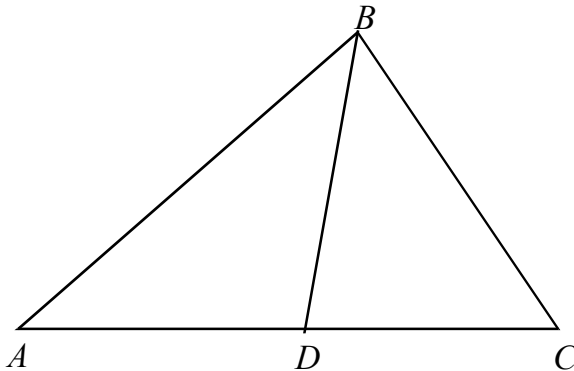


മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന രൂപങ്ങൾ ചേർത്ത് ഒരു സമചതുരം ഉണ്ടാക്കിയപ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവ് 144 ച.സെ.മി. എന്ന് കിട്ടി. വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര ?

26. $ax^2+bx+c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $a-b+c = 0$ ആയാൽ ഈ സമവാക്യത്തിന് ഒരു പരിഹാരം ഉണ്ടെന്ന് തെളിയിക്കുക?

27. $2n^2 + 5n$ എന്നത് സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ 'n' പദങ്ങളുടെ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 1375 ഈ ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ ഏതാനും പദങ്ങളുടെ തുകയായാൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം എത്ര ?

28



ചിത്രത്തിൽ BD എന്ന വശം $\triangle ABC$ യുടെ സമഭാജിയാണ്. DC എന്ന വശം AD യേക്കാളും 3 യൂണിറ്റ് കൂടുതലാണ്. AD യുടെ രണ്ട് മടങ്ങ് നീളമുണ്ട് AB യ്ക്ക്. AD യേക്കാളും കൂടുതലാണ് BC എങ്കിൽ $\triangle ABC$ യുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.

29 $(m+1)x^2+2(m+3)x+2m+3 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ 2 പരിഹാരങ്ങളും തുല്യമായാൽ 'm' എത്ര ?

30. പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക

a) $x^2+12x+8 = 2x - 16$

b) $x(x+3) = x + 15$

c) $(x-1)^2 - 4 = 0$

d) $(x+3)^2 - 9 = 0$

e) $(x+8)^2 = x^2 + (x+4)^2$

$$f) 6x - \frac{5}{x} = 1$$

$$g) \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = 2$$

$$h) \frac{x}{2} - \frac{4}{x} = 1$$

$$i) \frac{3x}{2} - \frac{8}{3x} = 0$$

$$j) \frac{x}{x-3} = \frac{2}{2}$$

$$k) (2x+3)(3x-1) = y^2$$

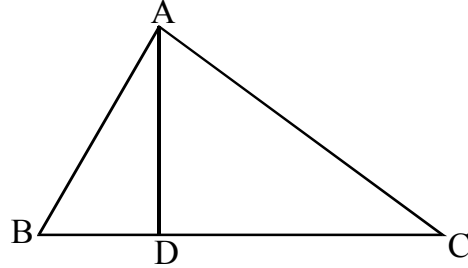
$$l) x + \frac{1}{x} = 4 \frac{1}{4}$$

$$m) \frac{x-5}{2x-3} = \frac{5x-7}{7x-5}$$

$$n) (6x-3)(x+5) - 2(x+6) = 4$$

ഓർമ്മിക്കേണ്ടുന്ന വസ്തുതകൾ

1. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ തുടർച്ചയായ മൂന്നുപദങ്ങൾ
 $= x-d, x, x+d$ എന്നെഴുതാം
2. ആദ്യത്തെ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക $\frac{n(n+1)}{2}$
3. ചിത്രത്തിൽ AD എന്നത് $\angle BAC$ യുടെ സമഭാജിയായാൽ
 $BD : DC = AB : AC$ ആയിരിക്കും.



4. നീളം l ഉം വീതി b ഉം അയാൽ
 ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= lb$
 ചുറ്റളവ് $= 2(l+b)$
5. മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} bh$
6. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
7. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ആയാൽ $ad = bc$
8. തുടർച്ചയായ രണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ $= x, x+1$
9. തുടർച്ചയായ 2 ഇരട്ട എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ $= x, x+2$
10. തുടർച്ചയായ 2 ഒറ്റ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ $= x, x+2$
11. സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങൾ $x, x+d$
12. മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധം $പാദം^2 + ലംബം^2 = കർണ്ണം^2$
13. രണ്ട് സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 5 ആയാൽ സംഖ്യകൾ $x, x+5$ or $x, x-5$

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) എന്ന സമവാക്യത്തിൽ

- 1) $b^2 - 4ac < 0$ ആയാൽ സമവാക്യത്തിന് മൂല്യം ഇല്ല
- 2) $b^2 - 4ac = 0$ ആയാൽ സമവാക്യത്തിന് ഒരു മൂല്യം മാത്രം
- 1) $b^2 - 4ac > 0$ ആയാൽ സമവാക്യത്തിന് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ
- 1) $b^2 - 4ac$ യെ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം എന്ന് പറയുന്നു

ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക

രേഖീയ സംഖ്യ x ആയാൽ വ്യുൽക്രമം $\frac{1}{x}$ അവയുടെ തുക k ആയാൽ

$$x + \frac{1}{x} = k$$

$$x^2 - kx + 1 = 0$$

$$\text{വിവേചകം} = k^2 - 4$$

സമവാക്യത്തിന് മൂല്യം ഉണ്ടാകണമെങ്കിൽ വിവേചകം ≥ 0 ആയിരിക്കണം

$$k^2 - 4 \geq 0$$

$$k^2 \geq 4$$

$$\therefore K \geq 2 \text{ or } K \leq -2$$

ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക -2 നും 2 നും ഇടയിലുള്ള ഒരു സംഖ്യ ആയിരിക്കുകയില്ല.

പ്രോജക്ട്

രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങളുടെ ഗുണോത്തരങ്ങളും മൂല്യങ്ങളും തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധം കണ്ടെത്തുക

UNIT TEST

1. ഒരു സംഖ്യയെ 6 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ പോലും 6 നെ അംഗസംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ചപ്പോഴും ഫലം ഒന്നു തന്നെയായാൽ സംഖ്യ ഏത് ?
2. തുടർച്ചയായ രണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 506 ആയാൽ സംഖ്യകൾ ഏവ?
3. തുടർച്ചയായ ഇരട്ടഎണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 288 ആയാൽ സംഖ്യകൾ ഏതെല്ലാം ?
4. ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിൽ നിന്ന് അതിന്റെ 8 മടങ്ങ് കുറച്ചാൽ 128 കിട്ടും. സംഖ്യ ഏത് ?
5. ഒരു സംഖ്യയുടെ നാലിൽ ഒന്നും അതേ സംഖ്യയുടെ പത്തിലൊന്നും ഗുണിച്ചപ്പോൾ 90 കിട്ടി. സംഖ്യ കണ്ടെത്തുക.
6. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ 2 മടങ്ങിനേക്കാൾ 6 കൂടുതലാണ് കർണ്ണം. മൂന്നാമത്തെ വശം മൂന്ന് മടങ്ങിനേക്കാൾ 6 കുറവാണ്. എങ്കിൽ പാദത്തിന്റെ നീളം എത്ര ? കർണ്ണം എത്ര?
7. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് 784 ച.സെ.മി. ആയാൽ അതിന്റെ വ്യാസം എന്ത് ?
8. പൊന്നമ്മടീച്ചർക്ക് വനവൽക്കരണത്തിന്റെ ഭാഗമായി 200 വൃക്ഷതൈകൾ ലഭിച്ചു. തൈകൾ വരിയിലേയും നിരയിലേയും എണ്ണങ്ങൾ പരമാവധി തുല്യമാകത്തക്കവിധം വെച്ചു പിടിപ്പിച്ചപ്പോൾ 4 ചെടികൾ ബാക്കിയായി. ഒരു വരിയിൽ എത്ര തൈകൾ നട്ടു ?
9. അപ്പന്റെയും ഭാസിയുടെയും വയസുകളുടെ അംശബന്ധം 3:1 ആണ്. അഞ്ച് വർഷം മുമ്പ് അവരുടെ വയസുകളുടെ ഗുണനഫലം 125 ആയാൽ രണ്ടുപേരുടെയും ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് എത്ര ?
10. A എന്ന സ്ഥലത്ത് നിന്ന് ഒരാൾ നേരെ കിഴക്കോട്ടേക്ക് നടന്നു. അവിടെ നിന്ന ഇടത്തോട്ട് തിരിഞ്ഞ് നേരെ ആദ്യം നടന്ന ദൂരത്തേക്കാൾ 2 കി.മി. ദൂരം അധികം നടന്നു. ഇപ്പോൾ പുറപ്പെട്ട സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 10 കി.മി. അകലെ ആണെങ്കിൽ അയാൾ നടന്ന ദൂരം എത്ര ?
11. ഒരു സംഖ്യയോട് 10 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയും 15 ഉം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും സംഖ്യയോട് 12 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയും 13 ഉം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും തുല്യമായാൽ ആദ്യ അംശബന്ധത്തിലെ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.
12. ഒരു ടൈലിന്റെ നീളം വീതിയേക്കാൾ 4 സെ.മി. കൂടുതലാണ്. 3.6 മീ. നീളവും 2 മീ. വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ നിലത്തു പാകുന്നതിനായി 1200 ടൈലുകൾ ആവശ്യമായി വന്നു. ടൈലിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.
13. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം 10% കൂട്ടുകയും സമീപവശം 10% കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്തപ്പോൾ കിട്ടിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 99 ച.സെ.മി. ആയാൽ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ?
14. എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ സംഖ്യയുടെ വർഗത്തോട് 1 കൂട്ടിയെഴുതിയ ശ്രേണിയാണ് 2,5,10..... ഇതിലെ ഒരു സംഖ്യ 677 ആയാൽ ഇതിന്റെ ഇരുവശത്തുമുള്ള സംഖ്യകൾ ഏതെല്ലാം ?

ത്രികോണമിതി

ആമുഖം

ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകളും അവയുടെ പ്രത്യേകതകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടു വളർന്നു വികാസം പ്രാപിച്ച ഒരു ഗണിതശാസ്ത്രശാഖയാണ് ത്രികോണമിതി. സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതയാണ് ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനം. അതിനാൽ ത്രികോണങ്ങളിൽ കോണുകൾ അറിഞ്ഞാൽ വശങ്ങളുടെ അംശ ബന്ധം പ്രസ്താവിക്കാൻ കഴിയുകയും ഇതിനെ sine, cosine, tangent എന്നീ പേരുകളിലൂടെ വ്യാഖ്യാനിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. പിന്നീട് അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പ്രായോഗിക സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഇവ ഉപയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന തരത്തിലാണ് ഈ അധ്യായത്തിന്റെ ചർച്ച.

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- * ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.
 - * sine, cosine കോണിന്റെ എന്നീ വിലകൾ കോൺ അളക്കാനുള്ള സംഖ്യകളാണ് എന്ന ആശയം
 - * ചരിവിന്റെ അളവായി കോണിനെ കാണുന്ന രീതിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് tangent അളവ്
 - * ഉയരം, അകലം എന്നിവ കണക്കാക്കാൻ ത്രികോണമിതി അളവുകളുടെ ഉപയോഗം
- ഐ.സി.ടി.യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആശയങ്ങളും അധിക വിവരങ്ങളും അനുബന്ധത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളും കോണുകളും

താഴെ പറയുന്ന പ്രവർത്തനം ചെയ്യുക

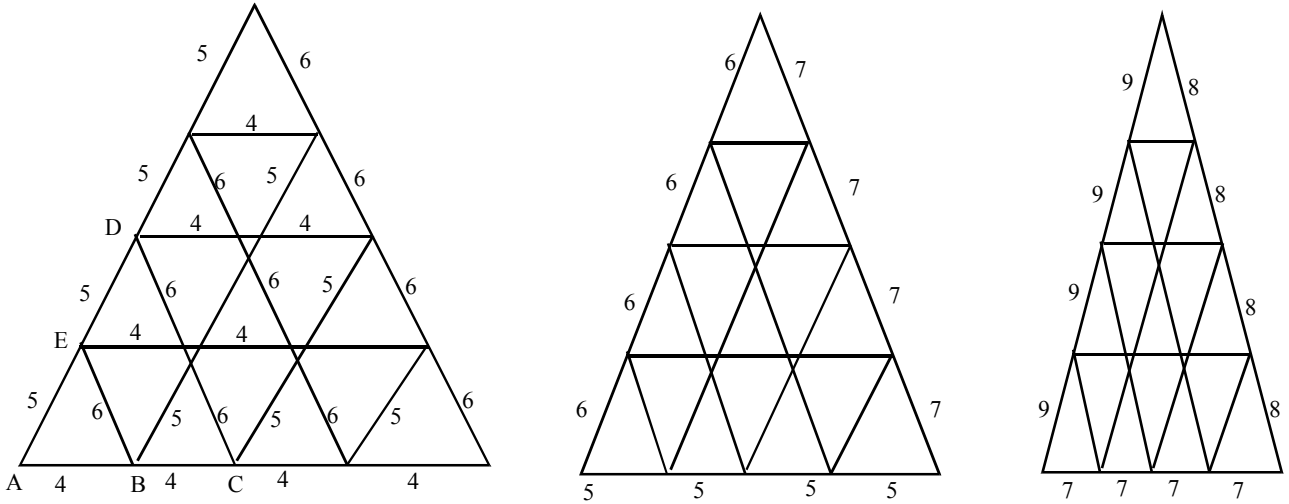
പ്രവർത്തനം - 1

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 4 സെ.മി., 5 സെ.മി, 6 സെ.മി., 7 സെ.മി., 8 സെ.മി, 9 സെ.മി, 5 സെ.മി., 6 സെ.മി., 7 സെ.മി. എന്നിവ വരുന്ന 3 തരം ത്രികോണങ്ങൾ ഒരു കട്ടി കടലാസിൽ വെച്ച് വെട്ടിയെടുക്കുക. ഓരോ കുട്ടിയും ഏതെങ്കിലും ഒരു തരം ത്രികോണം വെച്ച് വെട്ടിയെടുക്കണം. അപ്പോൾ ഓരോ തരത്തിലും ഉള്ള കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ. ഇവയെല്ലാം പരിശോധിച്ച് സർവ്വസമങ്ങളായവ ഏതൊക്കെ എന്ന് കണ്ടെത്തി വേർതിരിക്കട്ടെ. ഒരു ത്രികോണത്തിന് മുകളിൽ മറ്റൊന്ന് ചേർത്തുവെച്ച് പരിശോധിക്കാൻ അധ്യാപകൻ സഹായിക്കുക.

ഈ പ്രവർത്തനത്തിൽ നിന്ന് വശങ്ങൾ തുല്യമായ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും തുല്യവശങ്ങൾക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകളുടെ തുല്യമാകുന്നു എന്ന് 8-ാം ക്ലാസിൽ സർവ്വസമത്രികോണം എന്ന ഭാഗത്ത് പഠിച്ചത് ഓർമ്മിപ്പിക്കാമല്ലോ.

പ്രവർത്തനം - 2

ഒരേ തരത്തിലുള്ള ത്രികോണങ്ങളെ താഴെ കാണുന്ന രീതിയിൽ ചേർത്തുവെച്ച് വലിയ ത്രികോണങ്ങളാക്കുക



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ ചെറുതും വലുതുമായ ത്രികോണങ്ങളിൽ കോണുകളും വശങ്ങളും എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

കോണുകൾ തുല്യമാകുന്നു. എന്നാൽ വശങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നില്ല എന്ന് കാണാം.

ഉദാ:- $\triangle ABE$, $\triangle OACD$ ഇവയിൽ

$\angle A$ പൊതുവായ കോൺ

$LB = LC$ സർവ്വസമത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ

$LE = LD$

വശങ്ങൾ $AB = 4$ $AC = 8$ $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$BE = 6$ $DC = 12$ $\therefore \frac{BE}{DC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$AE = 5$ $AD = 10$ $\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

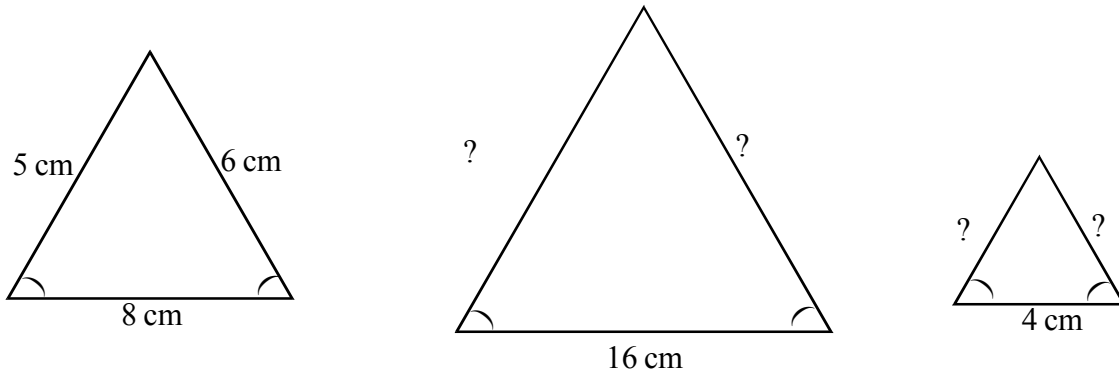
$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{DC} = \frac{AE}{AD}$ എന്നു കാണാം.

മൂന്നു തരം ത്രികോണങ്ങളിലും ഇങ്ങനെ പരിശോധിച്ചാൽ 9-ാം ക്ലാസിൽ സദൃശത്രികോണം എന്ന പാഠഭാഗത്ത് പഠിച്ച താഴെ പറയുന്ന ആശയം ഓർമ്മിപ്പിക്കാമല്ലോ.

കോണുകൾ തുല്യമാകുന്ന ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം തുല്യകോണുകൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശ

ങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.

മറ്റൊരു പ്രവർത്തനം : താഴെ കാണുന്ന തരത്തിൽ ചിത്രം നൽകുന്നു



ഒരേ കോണുള്ള മൂന്ന് ത്രികോണങ്ങളാണ് മുകളിലുള്ളത്. അവയുടെ ചില വശങ്ങളുടെ നീളം തന്നിട്ടുണ്ട്. മറ്റുവശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

അധ്യാപകൻ താഴെ പറയുന്ന സൂചനകളിലൂടെ ചർച്ച നയിക്കുമല്ലോ.

ഒന്നാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8; 5; 6 എന്നിവ ആയതിനാൽ മറ്റ് രണ്ട് ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങൾ ഈ സംഖ്യകൾക്ക് ആനുപാതികമാണ്.

ഓരോ ത്രികോണത്തിലും ഒരുവശം തന്നതിനാൽ മറ്റു വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

ഒന്നാമത്തെ ത്രികോണത്തിലെ 8 എന്നവശത്തിന് സമാനമാണ് രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിലെ 16 എന്ന വശം

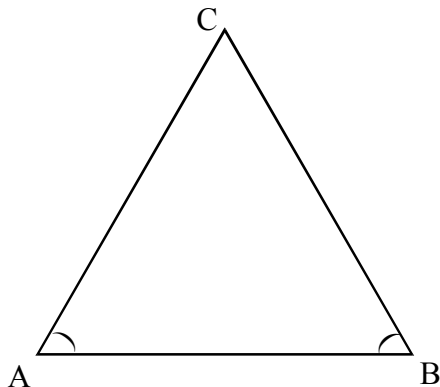
$$\text{അതായത് } 8 \times 2 = 16$$

$$\therefore \text{ മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങൾ } 5 \times 2 = 10, 6 \times 2 = 12$$

ഇതുപോലെ മൂന്നാമത്തെ ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങൾ കാണാമല്ലോ

ഇതോടൊപ്പം താഴെ പറയുന്ന പ്രവർത്തനം ചെയ്യുക

മേൽ കൊടുത്ത അതേ കോണുകളുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം വശങ്ങളുടെ അളവ് പറയാതെ നൽകുക.



ഇവിടെ വശങ്ങളുടെ നീളം അറിയില്ലെങ്കിലും

$$\frac{AB}{8} = \frac{AC}{5} = \frac{BC}{6}$$

എന്ന് കിട്ടുമെന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തുക

ഇതേ ബന്ധം മറ്റു തരത്തിലും എഴുതട്ടെ

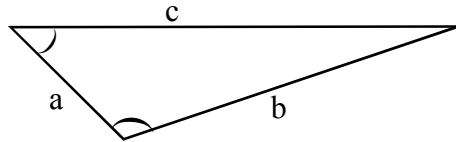
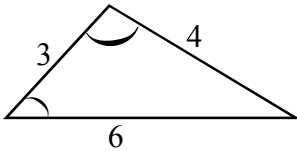
$$\frac{AB}{AC} = \frac{8}{5} ; \frac{AC}{BC} = \frac{5}{6} ; \frac{AB}{BC} = \frac{8}{6}$$

$$AB : AC : BC = 8:5:6$$

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്ന് ഇവിടെ ഉറപ്പിക്കണം.

ഇതിന് താഴെ പറയുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങൾ കൊടുക്കാം.

1.

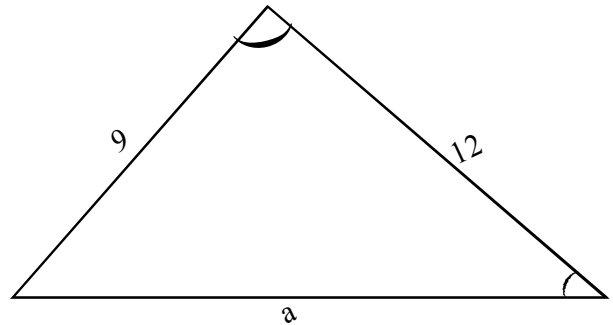
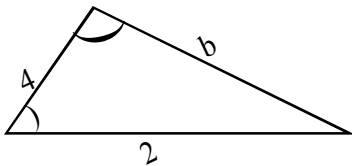


$$\frac{a}{b} = \dots\dots\dots; \quad \frac{b}{c} = \dots\dots\dots; \quad \frac{c}{a} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{b}{a} = \dots\dots\dots; \quad \frac{c}{b} = \dots\dots\dots; \quad \frac{a}{c} = \dots\dots\dots$$

$$a : b : c = \dots\dots\dots$$

2)



$$\frac{a}{2} = \dots\dots\dots; \quad \frac{b}{9} = \dots\dots\dots; \quad a = \dots\dots\dots; b = \dots\dots\dots$$

അനുബന്ധം നോക്കുക

ICT ഉപയോഗിച്ച് ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുള്ള വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തുല്യമെന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തുക

വശങ്ങൾ നീളങ്ങളുടെ ക്രമത്തിൽ a, b, c, യും

$$x, y, z \text{ ആയാൽ } \frac{a}{b} = \frac{x}{y}, \quad \frac{a}{c} = \frac{x}{z}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{z} \text{ എന്നിങ്ങനെ കാണാം}$$

കോണുകളിൽ നിന്ന് വശങ്ങളിലേക്ക്

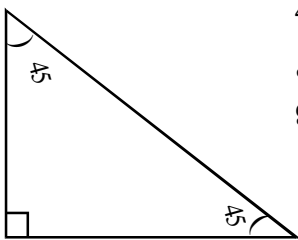
ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടാൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു എന്നു കണ്ടല്ലോ. എങ്കിൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കോണുകളുടെ അളവുകളിലൂടെ എങ്ങനെ പ്രസ്താവിക്കാം എന്ന് നോക്കാം.

45° , 45° , 90° കോണുകളുള്ള ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് തുടങ്ങാം

പ്രവർത്തനം

കുട്ടികൾക്ക് ഇഷ്ടമുള്ള നീളം വശമായി എടുത്ത് ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ കൊടുക്കുക. വശത്തിന്റെ നീളം എഴുതട്ടെ.

വികർണ്ണം വരച്ച് കിട്ടുന്ന ഓരോ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും കോണുകൾ



45° , 45° , 90° എന്ന് കണ്ടെത്തട്ടെ.

കിട്ടിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശം പൈതഗോറസ് തത്വം ഉപയോഗിച്ച് കാണാമല്ലോ

കിട്ടിയ വശങ്ങളുടെ നീളം പട്ടികയായി എഴുതുക

	കോണുകൾ	തുല്യകോണുകൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ	വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം
കുട്ടി 1	45° , 45° , 90°	5 cm, 5 cm, $5\sqrt{2}$ cm	$1:1:\sqrt{2}$
കുട്ടി 2	45° , 45° , 90°	a cm, a cm, $a\sqrt{2}$ cm	

ഇതു പോലെ സമഭുജത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് തുടങ്ങി 30° , 60° , 90° കോണുകളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം പ്രസ്താവിക്കാമല്ലോ

കോണുകൾ 45° , 45° , 90° ആയാൽ വശങ്ങൾ $1:1:\sqrt{2}$ ഉം

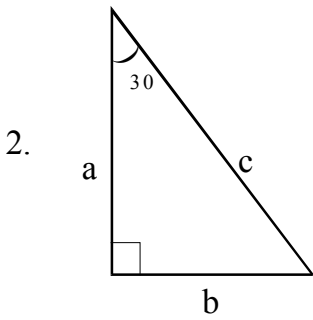
കോണുകൾ 30° , 60° , 90° ആയാൽ വശങ്ങൾ $1:\sqrt{3}:2$ ഉം

ആകുന്നു എന്ന് ബോധ്യപ്പെടുമല്ലോ

പ്രവർത്തനം

താഴെ കൊടുക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് നൽകി മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക

-
-
- ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണുക
- $\frac{AB}{AC} = ?$ $\frac{AB}{BC} = ?$ $\frac{AC}{BC} = ?$



$$\frac{a}{b} = ? ; \quad \frac{a}{c} = ? ; \quad \frac{b}{c} = ? ;$$

$$\frac{b}{a} = ? ; \quad \frac{c}{a} = ? ; \quad \frac{c}{b} = ? ;$$

6. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി 40 സെ.മി. ആയാൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക
(സൂചന : വശം കണ്ടുപിടിച്ച് $\frac{1}{2} \times$ വശം $\times$ 40 കാണുക)
7. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം 10 സെ.മി. ആയാൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
(സൂചന : വശം കണ്ടുപിടിച്ചും പരപ്പളവ് കാണാമല്ലോ)
8. ഒരു സമഭുജസാമാന്തരീകത്തിന്റെ വശം 10 സെ.മി. ഉം ഒരു കോൺ 60° ഉം ആയാൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
(സൂചന : ഉന്നതി കണ്ടുപിടിച്ചും വികർണം കണ്ടുപിടിച്ചും ചെയ്യാം)
9. ഒരു സമാന്തരീകത്തിന്റെ സമീപവശങ്ങൾ 6 സെ.മി., 8 സെ.മി. ഒരു കോൺ 150° ആയാൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
(സൂചന : 150 നോട് അടുത്ത കോൺ 30° ആകുമല്ലോ)
10. 10 സെ.മി. വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ ശീർഷങ്ങൾ വരത്തക്കവിധം 3θ കോണുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ മറ്റ് വശങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.
11. 10 സെ.മി. വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്താകൃതിയായ കടലാസിൽ നിന്നും ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരം മുറിച്ചെടുത്താൽ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്ത് ?
12. 10 സെ.മി. വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്താകൃതിയായ കടലാസിൽ നിന്നും ഏറ്റവും വലിയ സമഭുജത്രികോണം മുറിച്ചെടുത്താൽ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്ത് ?

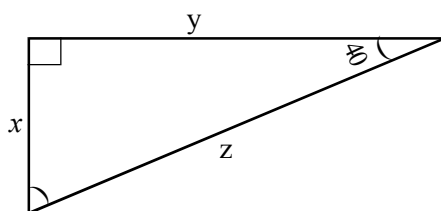
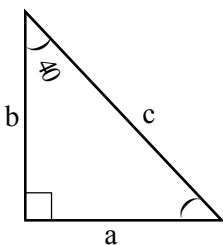
Sine, Cosine എന്നിവ

45° , 45° , 90° കോണുകളുള്ള ത്രികോണത്തിലും 30° , 60° , 90° കോണുകളുള്ള ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തിരിച്ചറിഞ്ഞല്ലോ. എങ്കിൽ മറ്റ് കോണുകളുള്ള ത്രികോണത്തിലും കോണുകൾ അറിഞ്ഞാൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എങ്ങനെ കാണാം ?

40° , 50° , 90° കോണുകളുള്ള ഒരു തരം ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് തുടങ്ങാം. താഴെ കൊടുത്ത പ്രവർത്തനം നിരീക്ഷിക്കുക.

പ്രവർത്തനം

40° , 50° , 90° കോണുകളുള്ള രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ ഒരു ചാർട്ടിൽ പ്രദർശിപ്പിക്കുക



രണ്ട് ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണല്ലോ.

$a : b : c = x : y : z$ അല്ലെങ്കിൽ

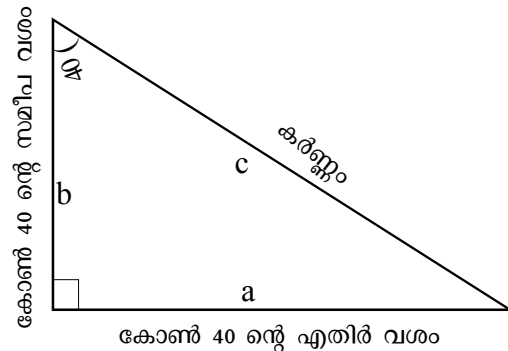
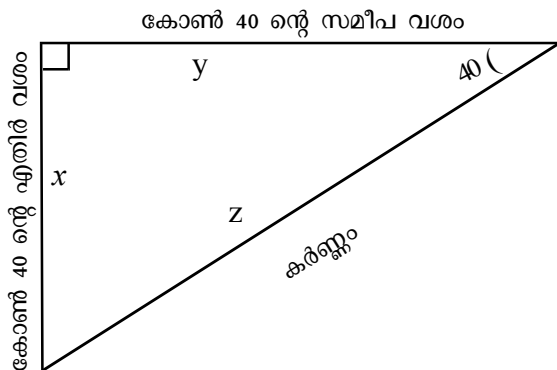
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

ഇതിൽ നിന്ന് $\frac{a}{c} = \frac{x}{z}$ എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ

ഇവിടെ a യും c യും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെയും x ഉം z ഉം രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളാണല്ലോ.

അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ തന്നെ രണ്ടുവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ സ്ഥാനത്തുള്ള വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമാണ്.

ഇവിടെ സമാനമായ വശങ്ങൾ തിരിച്ചറിയാൻ ഒരു കോണിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി പേർ നൽകാം. ഉദാഹരണത്തിന് ത്രികോണത്തിലെ 40° കോണിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ' a ' വശത്തെ എതിർവശമെന്നും ' c ' വശത്തെ കർണമെന്നും വിളിക്കാം. ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള വശങ്ങൾ തിരിച്ചറിയാൻ ഒരു കോണിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വശങ്ങൾക്ക് താഴെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന വിധം പേർ നൽകിയാൽ ഈ അംശബന്ധം പ്രസ്താവിക്കാൻ എളുപ്പമാവുമല്ലോ.



$\frac{a}{c}$, $\frac{x}{z}$ എന്നത് രണ്ടു ത്രികോണത്തിലായാലും

$$\frac{\text{കോൺ } 40^\circ \text{ ന്റെ സമീപ വശം}}{\text{കർണം}} \quad \text{ആകുന്നു}$$

അപ്പോൾ $\frac{a}{c}$, $\frac{x}{z}$ ആയതിനാൽ കോണുകളുള്ള $40^\circ, 50^\circ, 90^\circ$

ഏത് ത്രികോണത്തിലും $\frac{\text{കോൺ } 40^\circ \text{ ന്റെ സമീപ വശം}}{\text{കർണം}}$ ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയാണ്. അതായത് ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ മാറാതെ വശങ്ങൾ എത്ര മാറിയാലും എതിർവശത്തിന്റെ നീളവും കർണത്തിന്റെ നീളവും മാറുമെങ്കിലും $\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണം}}$ മാറുന്നില്ല.

40° കോണിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഈ മട്ടത്രികോണത്തിലെ $\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണം}}$ എന്ന

സ്ഥിരസംഖ്യയെ 40° കോണിന്റെ Sin എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ ചുരുക്കി $\text{Sin } 40 = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണം}}$ എന്നെഴുതാം.

Sin 40 ന്റെ ഏകദേശ വില കുട്ടികൾ ചിത്രം വരച്ച് വശങ്ങൾ അളന്ന് ഹരിച്ച് കാണട്ടെ.

40 ഡിഗ്രി കോണിന്റെ എതിർവശവും കർണ്ണവും അളന്ന് ഈ സ്ഥിര സംഖ്യ കാണാൻ കുട്ടികളെ സഹായിക്കുക. താഴെ പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാം.

ത്രികോണം	40° കോണിന്റെ എതിർവശം	കർണ്ണം	$\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$
1	6.42	10	0.64
2			
3			

താഴെ കൊടുത്ത പ്രവർത്തനവും ചെയ്യാം

ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ 10 സെ.മി. ആരത്തിൽ വൃത്തം വരച്ച് കേന്ദ്രത്തിൽ 40° കോൺ നിർമ്മിക്കുക. കർണ്ണം 10 സെ.മി. ആയി വരുന്ന മട്ടത്രികോണം വരച്ച് എതിർവശത്തിന്റെ നീളം കണ്ടെത്തി പട്ടികയിൽ എഴുതാം. ആരം മാറ്റി അതേ കോണളവുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിൽ എതിർവശവും കർണ്ണത്തിന്റെയും നീളം കണ്ടെത്തി പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

ഓരോ ഘട്ടത്തിലും എതിർവശത്തെ കർണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യ ഏകദേശം 0.64 എന്ന് കാണുകയും കുറച്ചുകൂടി കൃത്യമായി 0.6428 ആണെന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ടെന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുക.

∴ $\sin 40 \approx 0.6428$ എന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തുക

40 ഡിഗ്രി കോണുള്ള ഏത് മട്ടത്രികോണത്തിലും $\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} \approx 0.6428$ തന്നെയാണ്. കോണിന്റെ അളവ് മാറുമ്പോൾ ഈ സംഖ്യയും മാറും. അതിനാൽ ഈ സംഖ്യ കോണിന്റെ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതായത് കോണിന്റെ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ് Sine വില

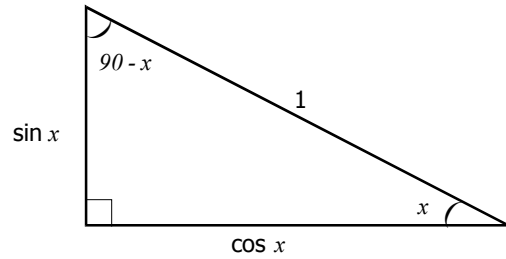
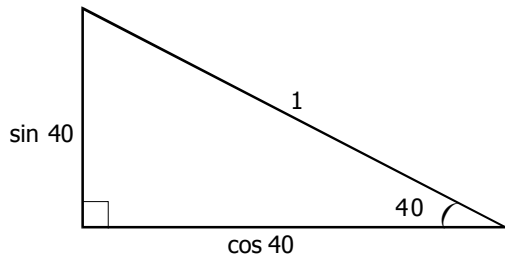
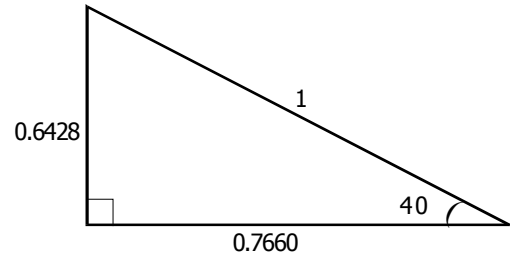
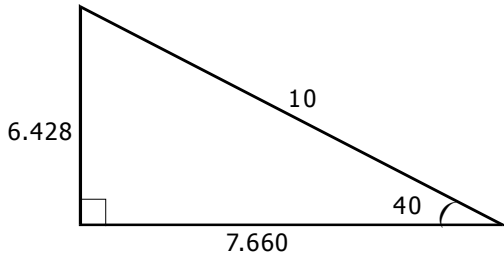
ഒരു കോണിന്റെ sine വില അറിഞ്ഞാൽ ആ കോണിന്റെ അളവ് കണ്ടെത്താം.

ഇതുപോലെ $\frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$ എന്ന സ്ഥിര സംഖ്യ 40° കോണിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി കണ്ടെത്തുക. ഇതിനെ cosine എന്നും സംഖ്യ ഏകദേശം 0.7660 ആകുന്നു എന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്താമല്ലോ. അതിനാൽ $\cos 40 \approx 0.7660$ എന്ന് കുട്ടികൾ മനസിലാക്കട്ടെ.

ഐ.സി.ടി. ഉപയോഗിച്ച് കോണുകളുടെ sin, cos വിലകൾ കണ്ടെത്താം.

40, 50, 90 കോണളവുള്ള ഈ ത്രികോണങ്ങളിൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $\sin 40 : \cos 40 : 1$ അല്ലെങ്കിൽ

0.6428 : 0.7660 : 1 എന്ന് കാണാൻ കുട്ടികളെ പ്രാപ്തരാക്കണം. (50° കോണിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഈ അംശബന്ധം എങ്ങനെ എഴുതാം?)



കോണുകൾ x , $90 - x$, 90 അപ്പോൾ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $\sin x : \cos x : 1$ ആകുന്നു

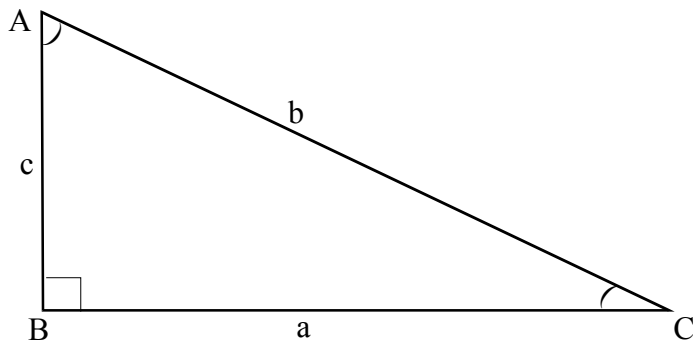
ഇതോടൊപ്പം ആര്യഭടന്റെ സൈൻ പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കുക. വ്യാസാർദ്ധവുമായി (അർദ്ധജ്യാ) ബന്ധപ്പെട്ട് സൈൻപട്ടിക ആദ്യമായി ഉണ്ടാക്കിയത് ആര്യഭടനാണ്

$$\sin A = \frac{\text{LAയുടെ എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

$$\cos A = \frac{\text{LAയുടെ സമീപ വശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

എന്നിവ ഉറപ്പിക്കുന്നതിനും പൂരകകോണുകളുടെ Sine, Cosine ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും താഴെ കൊടുക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

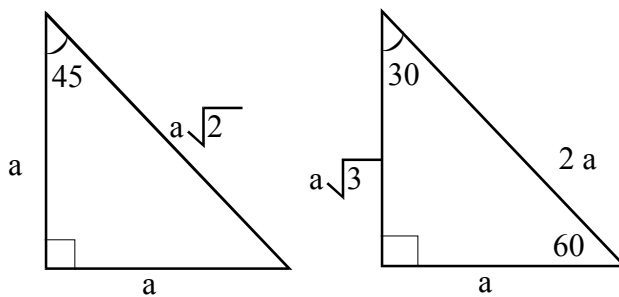
വിട്ടഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക (ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്)



- 1) $\sin \dots = \frac{a}{b}$, $\cos \dots = \frac{c}{b}$
- 2) $\cos \dots = \frac{a}{b}$, $\sin \dots = \frac{c}{b}$

- 3) $LA = 35^\circ$ ആയാൽ $LC = \dots\dots\dots$
- 4) $LA = x^\circ$ ആയാൽ $LC = \dots\dots\dots$
- 5) $\sin \dots\dots\dots = \frac{a}{b} = \cos \dots\dots\dots$
- 6) $\sin \dots\dots\dots = \frac{c}{b} = \cos \dots\dots\dots$
- 7) $\sin 35^\circ = \cos \dots\dots\dots$
- 8) $\cos 35^\circ = \sin \dots\dots\dots$
- 9) $\sin x^\circ = \cos x^\circ \dots\dots\dots \cos x^\circ = \sin \dots\dots\dots$
- 10) $\sin A = \cos B \quad A + B \dots\dots\dots$

$45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ എന്നീ കോണുകളുടെ Sine, Cos വിലകൾ



ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്
 $\sin 45^\circ, \cos 30^\circ, \sin 30^\circ$
 എന്നിവ കണ്ടെത്തുക

ഈ വിലകൾ ഉറപ്പിക്കുന്നതിന് താഴെ കൊടുക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ ചെയ്യട്ടെ

- 1) $\sin^2 30^\circ = \dots\dots\dots; \cos^2 30^\circ = \dots\dots\dots \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \dots\dots\dots$
- 2) $\sin^2 60^\circ = \dots\dots\dots; \cos^2 60^\circ = \dots\dots\dots \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = \dots\dots\dots$
- 3) $\sin^2 45^\circ = \dots\dots\dots; \cos^2 45^\circ = \dots\dots\dots \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \dots\dots\dots$

ഏത് കോണിന്റെയും $\sin^2$ വിലയും $\cos^2$ വിലയും കൂട്ടിയാൽ ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടുമോ ?

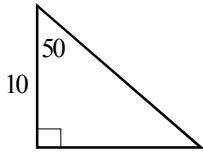
പേജ് 83 ലെ side box ചർച്ച ചെയ്യുക

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ എന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തുക

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണവും ന്യൂനകോണം ഉപയോഗിച്ച് $\sin, \cos$ എന്നിവയുടെ സഹായത്തോടെ മറ്റ് വശങ്ങളുടെ നീളം കാണാൻ കഴിയും. ടെക്സ്റ്റ് ബുക്കിലുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങൾ ചെയ്താ മല്ലോ. പേജ് നമ്പർ 82 അതോടൊപ്പം താഴെ കൊടുക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ ചെയ്യുക.

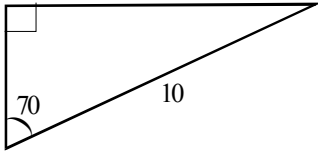
- 1) കർണ്ണം 10 സെ.മീ. ഒരു കോൺ 50° എങ്കിൽ ആ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു വശങ്ങൾ കാണുക

2)



കർണ്ണത്തിന്റെ നീളമെന്ത് ?

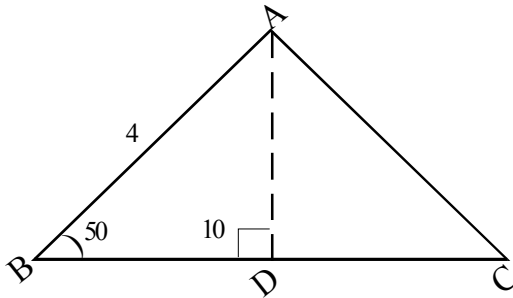
3)



$$\sin 20 = 0.3420, \cos 20 = 0.9397$$

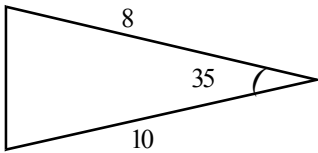
ഇവ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങൾ കാണുക

4)



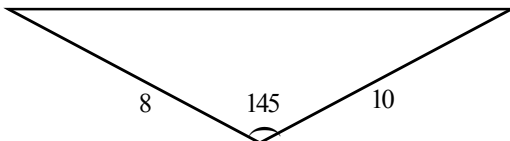
AD യുടെ നീളം കാണുക

5)



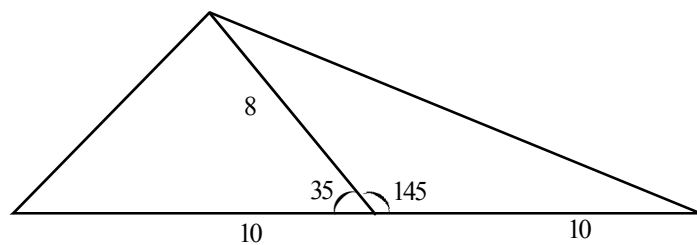
ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക

5)



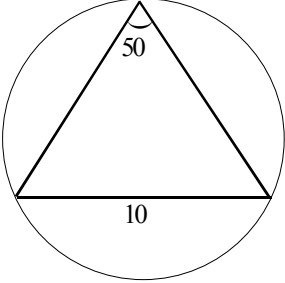
ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക

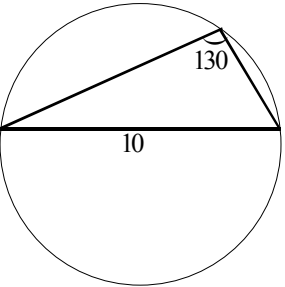
സൂചന ;



Sine വിലയും പരിവൃത്ത വ്യാസവും

പേജ് നമ്പർ 83 ലെ പ്രവർത്തനം ചെയ്യുക. അതോടൊപ്പം താഴെ കൊടുക്കുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങൾ ചെയ്യുമല്ലോ.

- 1)  ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കാണുക
(സൂചന : 50° കോണുള്ള മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക)

- 2)  ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വ്യാസം എത്ര ?
(സൂചന : 50° കോണുള്ള മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക)

വൃത്തത്തിൽ മട്ടകോൺ, ന്യൂനകോൺ, ബൃഹത്തകോൺ എന്നിവ വരയ്ക്കുമ്പോൾ കോണിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാൺ കേന്ദ്രവുമായി എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെടുന്നു എന്ന് വ്യക്തമാക്കണം.

ഏത് ത്രികോണത്തിന്റെയും ഒരു കോണം എതിർവശത്തിന്റെ നീളവും തന്നാൽ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കാണാൻ കഴിയുമോ ? എങ്ങനെ ? കോണിന്റെ അളവ് 90° , 90° ൽ കുറവ്, 90° ൽ കൂടുതൽ എന്നിവ ആകുമ്പോൾ എന്തെല്ലാമാണ് മാറ്റങ്ങൾ എന്നിവ ചർച്ച ചെയ്യുമല്ലോ.

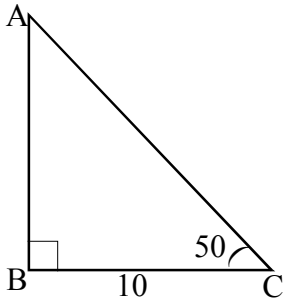
ഇത്തരം പ്രവർത്തനങ്ങളിലൂടെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണം അതിന്റെ എതിർവശവും നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു എന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തണം.

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 7 സെ.മീറ്ററും 8 സെ.മീറ്ററും ആണ്. അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 40° . ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര ?
- മേൽപ്പറഞ്ഞ ത്രികോണത്തിലെ കോൺ 140° ആയാൽ മൂന്നാമത്തെ വശം എത്ര ?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 10 സെ.മി., 20 സെ.മി. അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 80° ഉം ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. 80° കോണിന് പകരം 100° കോൺ ആയാൽ പരപ്പളവ് കാണുക
- 40 കോണുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ 10 സെ.മി. വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലാ

൯. എങ്കിൽ 40° കോണിന്റെ എതിർവശം എത്ര ?

7. 50° കോണുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എതിർവശം 10 സെ.മി. അതിന്റെ പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കൂടുന്നത് മറ്റ് രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളം എത്ര വീതം ആകുമ്പോഴാണ്.

tan എന്ന ആശയം



കർണ്ണം കാണാൻ എന്തുചെയ്യണം ?

Sine, Cos ഇവയിലേതാണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്.

Cos 50° ന്റെ വില ഉപയോഗിച്ച് കർണം കാണാമല്ലോ

എന്നാൽ മൂന്നാമത്തെ വശം കാണാൻ sin ഉം cos ഉം നേരിട്ട് ഉപയോഗിക്കാൻ സാധ്യമല്ലെന്ന് തിരിച്ചറിയട്ടെ.

50° കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സമീപവശം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയും ഏത് വലുപ്പത്തിലുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിലും സ്ഥിരമായിരിക്കുമല്ലോ. ഈ വിലയും പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടെന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തുമല്ലോ. ഈ വിലയാണ് tangent എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. ഇത് ചുരുക്കി tan എന്നെഴുതുന്നു. $\tan 50 = 1.1918$ എന്ന് പട്ടിയിൽ കാണുന്നു.

അതിനാൽ $\tan 50 = \frac{AB}{10}$ എന്നും

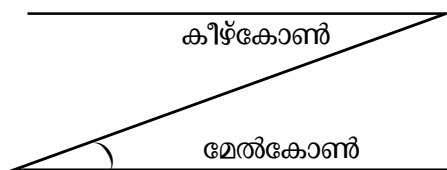
$$AB = 10 \times \tan 50 = 11.918 \text{ എന്നും കിട്ടുമല്ലോ.}$$

$\tan 30$, $\tan 60$, $\tan 45$ എന്നിവയുടെ വിലകൾ 30, 60, 90 ; 45, 45, 90 കോണുകളുള്ള മട്ടത്രികോണം ഉപയോഗിച്ച് കാണാനുള്ള പ്രവർത്തനം നൽകുക.

വിലകൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ ചെയ്യട്ടെ.

ടെക്സ്റ്റിലെ പേജ് നമ്പർ 87, 88, 89 ലെ പ്രവർത്തനം

അകലം , ഉയരം



മേൽകോൺ, കീഴ്കോൺ

എന്നിവ ബോധ്യപ്പെടുത്തുക

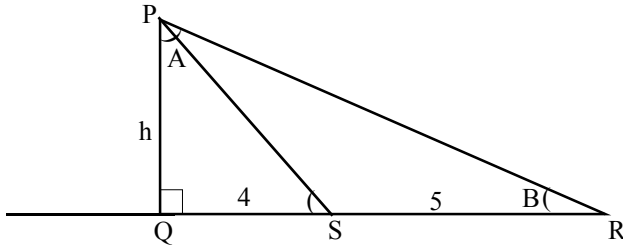
ടെക്സ്റ്റിലെ പേജ് നമ്പർ 91, 92, 93 ലെ പ്രശ്നങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്ത് അകലത്തെയും ഉയരത്തെയും കണക്കാക്കാൻ കുട്ടികളെ പ്രാപ്തരാക്കുക.

(കുറിപ്പ് : രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങളിൽ പൊതുവശമോ തുല്യവശമോ ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ വശം രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്നും പ്രത്യേകം കണ്ടു പിടിച്ച് തുല്യതപ്പെടുത്തി പ്രശ്ന പരിഹാരം കാണുക)

അതോടൊപ്പം താഴെ കാണുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുക

1. കുത്തനെ നിൽക്കുന്ന ടവറിന്റെ അഗ്രഭാഗം ടവറിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് 4 മീ. അകലത്തിൽ നിന്നും 9 മീറ്റർ അകലത്തിൽ നിന്നും നോക്കുന്നു. മേൽ കോണുകൾ രണ്ടും പൂരക കോണുകളാണെങ്കിൽ ടവറിന്റെ ഉയരം കാണുക.

സൂചന :



$$A + B = 90$$

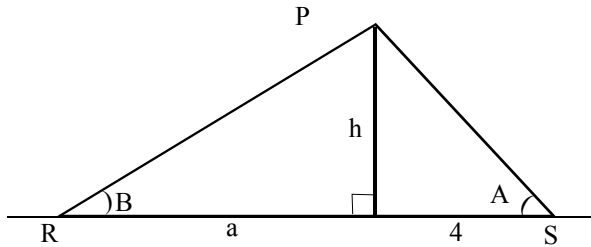
$$\therefore \angle QPR = A$$

$$\triangle PQS \text{ ൽ } \tan A = \frac{h}{4}$$

$$\triangle PQR \text{ ൽ } \tan A = \frac{9}{h}$$

ഇതിൽ നിന്നും h കാണാമല്ലോ

2. ടവറിനെ നോക്കുന്നത് ടവറിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിൽ നിന്നുമാണെങ്കിൽ ടവറിന്റെ ഉയരം മാറുമോ ?



ഇവിടെ $\angle RPS$ എത്ര ?

h എത്ര ?

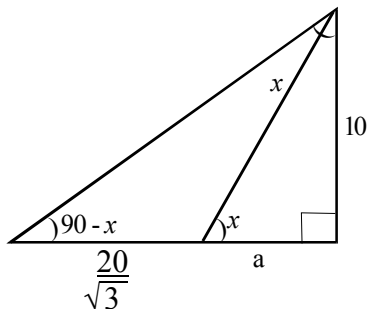
ഇത്തരം പ്രശ്നത്തിൽ അകലം a, b ആയാൽ ടവറിന്റെ ഉയരം

(മേൽകോണുകൾ പൂരകങ്ങളായാൽ) $\sqrt{a \cdot b}$ ആയിരിക്കും

3. ഒരു പോസ്റ്റിന്റെ അഗ്രഭാഗം ചുവട്ടിൽ നിന്ന് 3 മീറ്റർ, 27 മീറ്റർ എന്നീ അകലത്തിൽ നിന്ന് നോക്കുമ്പോൾ മേൽകോണുകൾ പരസ്പരം പൂരക കോണുകൾ ആയാൽ പോസ്റ്റിന്റെ ഉയരം എത്ര ?

4. 10 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ടവറിന്റെ അഗ്രഭാഗം ചുവട്ടിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനത്ത് നിന്ന് നോക്കുമ്പോൾ മേൽകോണുകൾ പരസ്പരം പൂരകമായി വരുന്നു. ഈ രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ളവ അകലം $\frac{20}{\sqrt{3}}$ മീറ്റർ ആയാൽ മേൽ കോണുകളുടെ അളവ് എന്ത് ? അകലങ്ങളും കാണുക

സൂചന :



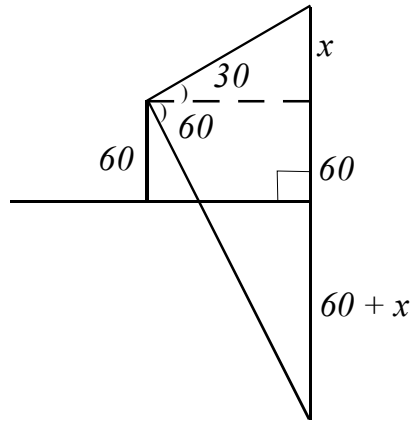
$$\frac{10}{b} = \frac{\frac{20}{\sqrt{3}} + a}{10} \therefore \sqrt{3} a^2 + 20 a - 100\sqrt{3} - 0$$

$$\therefore a = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

5. ഒരു നദീതീരത്ത് ഒരു മരമുണ്ട്. മറുകരയിലുള്ള 60 മീ. ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിൽ നിന്ന് മരത്തിന്റെ അഗ്രം 30° മേൽ കോണിൽ കാണുന്നു. ഇതേ സ്ഥലത്ത് നിന്ന് മരത്തിന്റെ വെള്ളത്തിലുള്ള പ്രതിബിംബത്തിന്റെ അറ്റം 60° കീഴ്കോണിൽ കാണുന്നു. എങ്കിൽ നദിയുടെ വീതി എത്ര? മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്ര?

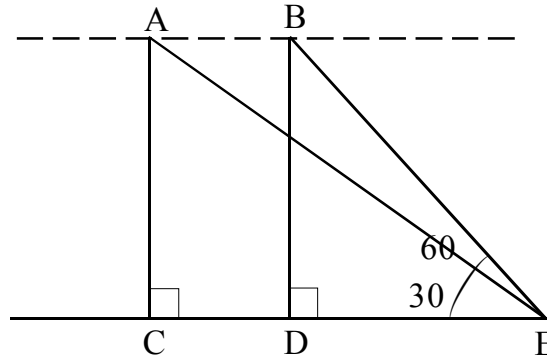
സൂചന :



$$\frac{\tan 60}{\tan 30} = \frac{120 + x}{x}$$

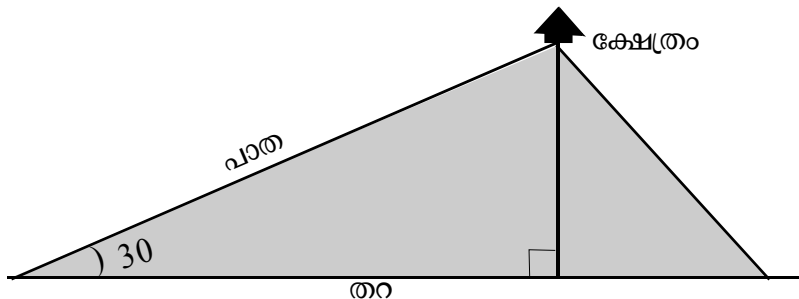
6. നിരപ്പായ സ്ഥലത്ത് നിന്ന് $3000\sqrt{3}$ മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ നിശ്ചിത വേഗത്തിൽ പറക്കുന്നു. ഒരു സ്ഥലത്ത് നിന്ന് വിമാനത്തെ 60° മേൽകോണിലും 30 സെക്കന്റിന് ശേഷം അതേ സ്ഥലത്ത് നിന്ന് 30° മേൽകോണിലും കാണുന്നു. എങ്കിൽ വിമാനത്തിന്റെ വേഗത എത്ര?

സൂചന :



$AC = 3000\sqrt{3}$
A,B ഇവ വിമാനത്തിന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ

7.



- ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നവിധം ക്ഷേത്രത്തിലേക്ക് ഒരു നേർപാതയുണ്ട്. പാതയിൽ തുടക്കം മുതൽ ക്ഷേത്രം വരെ 10 മീറ്റർ ഇടവിട്ട് 40 വിളക്ക് കാലുകൾ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ പാതയുടെ നീളം എത്ര? തറ നിരപ്പിൽ നിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ് ക്ഷേത്രം.

8. ഒരു വശം 10 സെ.മീ. ആകത്തക്ക വിധത്തിൽ 30° കോണുള്ളവ് വരുന്ന ഒരു സെറ്റ് സ്ക്വയറിന്റെ മാതൃകയിൽ ത്രികോണം വരച്ചാൽ എത്രവിധത്തിൽ ത്രികോണം കിട്ടും. ഓരോന്നിലും മറ്റ് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ അളക്കാതെ കണ്ടുപിടിക്കുക

$\tan$ വില ഉയരത്തേയും അകലത്തേയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയതാണല്ലോ. ഉയരവും അകലവും മാറുമ്പോഴാണല്ലോ സാധാരണയായി വസ്തുവിന്റെ ചരിവിന് മാറ്റം വരുന്നത്. അതിനാൽ ചരിവിന്റെ അളവായിട്ടാണ് $\tan$ ഉണ്ടായത്. പേജ് നമ്പർ 92 ലെ സൈഡ് ബോക്സ് ചർച്ച ചെയ്യുമല്ലോ

വശങ്ങളും കോണുകളും

ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ കിട്ടിയാൽ അതിന്റെ കോണുകൾ നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടല്ലോ. വശങ്ങൾ a, b, c യും എതിരെയുള്ള കോണുകൾ A, B, C യും ആയാൽ

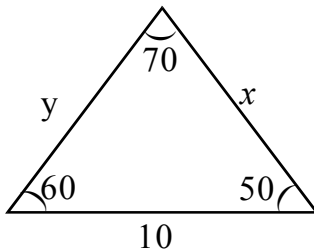
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{എന്ന് കാണാമല്ലോ}$$

(സൈഡ് ബോക്സ് 90 ചർച്ച ചെയ്യുക)

$$\text{കോണുകൾ കാണാൻ} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{എന്നും} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{എന്നും} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{എന്നും}$$

കാണാമല്ലോ (സൈഡ് ബോക്സ് 91 കാണുക)

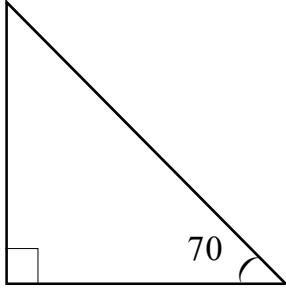


എങ്കിൽ x എത്ര? y എത്ര?

$$x = \frac{10 \cdot \sin 60}{\sin 70} \quad y = \frac{10 \cdot \sin 50}{\sin 70}$$

മൂല്യനിർണ്ണയ പ്രശ്നങ്ങൾ

1.



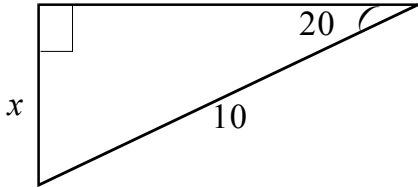
ചിത്രം നിരീക്ഷിച്ച്

$\sin 70$, $\cos 70$

എന്നിവയിൽ വലുതേത് എന്ന് എഴുതുക.

കാരണമെന്ത് ?

2.

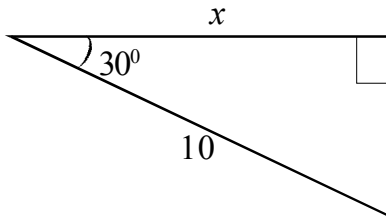


ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ x എന്ന്

അടയാളപ്പെടുത്തിയ വശത്തിന്റെ

നീളം കാണുക

3.

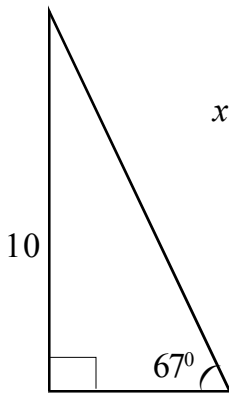


ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ x എന്ന്

അടയാളപ്പെടുത്തിയ വശത്തിന്റെ

നീളം കാണുക

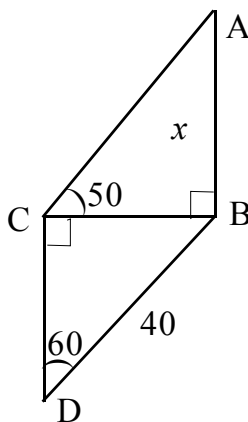
4.



67° കോണിന്റെ സമീപവശത്തിന്റെ നീളം

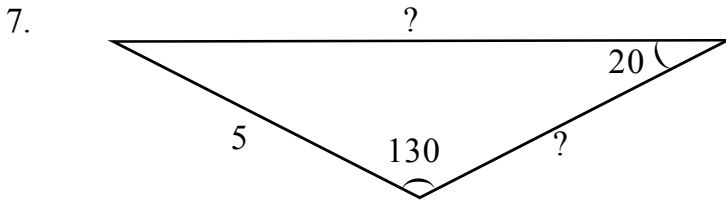
കാണുക

5.



AB യുടെ നീളം കാണുക

6. $\triangle PQR$ ൽ $PQ = PR = 10$ cm $\angle Q = 40^\circ$ ആയാൽ P യിൽ കൂടിയുള്ള ഉന്നതി കാണുക.
 (ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക)



സൂചന :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ഉപയോഗിക്കുക

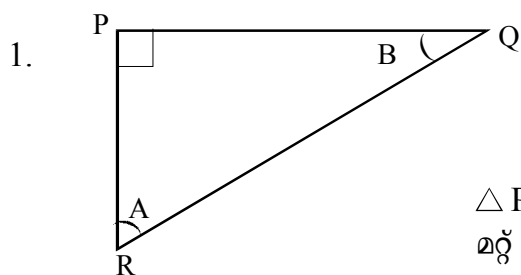
or B യിൽ നിന്ന് AC യിലേക്കുള്ള
 ലംബം വരയ്ക്കുക

8. നിരപ്പായ തറയിലുള്ളതും ഒരേ ഉയരമുള്ളതുമായ രണ്ട് വൈദ്യുതി പോസ്റ്റുകൾക്കിടയിൽ ഒന്നിൽ നിന്ന് 4 മീറ്റർ അകലത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ ആ പോസ്റ്റിനെ 58° മേൽക്കോണിലും മറ്റേ പോസ്റ്റിനെ 22° മേൽക്കോണിലും വീക്ഷിക്കുന്നു. പോസ്റ്റുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലമെന്ത് ?

9. സൂര്യൻ 48° മേൽ കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന് 18 മീറ്റർ നീളമുണ്ട്. എങ്കിൽ ആ മരത്തിന്റെ ഉയരമെത്രയായിരിക്കും ?

10. പണിതുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 30° മേൽ കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർ കൂടി ഉയർത്തി ഗോപുരം പണിതീർന്നപ്പോൾ അയാൾ അതേ സ്ഥലത്ത് നിന്ന് 60° മേൽ കോണിലാണ് അതിന്റെ അഗ്രം കണ്ടത്. ഗോപുരത്തിന്റെ ആകെ ഉയരം എത്ര ?

UNIT TEST



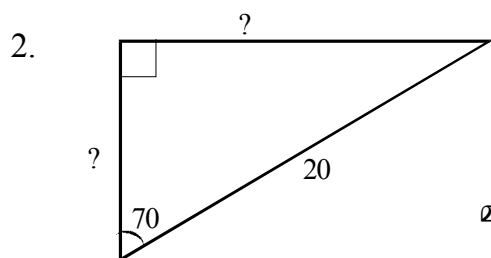
വിട്ടഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക

$\triangle PQR$ ൽ $\angle P = 90^\circ$,

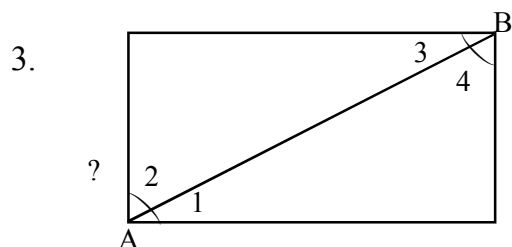
മറ്റ് കോണുകളുടെ അളവ് A, B എന്നിവയാണ്

$$\sin A = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}, \cos A = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}, \tan A = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}$$

$$\sin B = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}, \cos B = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}, \tan B = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}$$



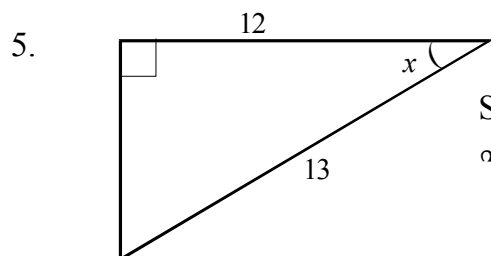
മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക



A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് നോക്കുമ്പോൾ മേൽക്കോൺ ഏത് ?

B യിൽ നിന്ന് A യിലേക്ക് നോക്കുമ്പോൾ കീഴ്ക്കോൺ ഏത് ?

4. $\sin A = \frac{4}{5}$ ആയാൽ $\cos A$, $\tan A$ എന്നിവയുടെ വില കാണുക



$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$,
എന്നിവയുടെ വില കാണുക

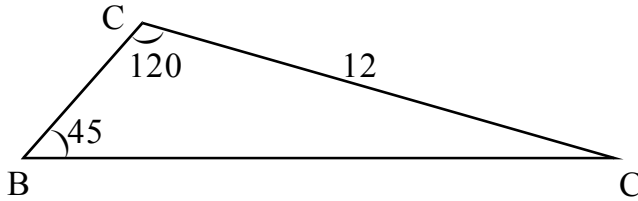
7. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 12 സെ.മി., 16 സെ.മി. എന്നിവയും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 80° യുമായാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക

$$\cos A = \frac{5}{4}, \quad \sin A = \frac{5}{3}, \quad \cot A = \frac{3}{4}, \quad \text{എങ്കിൽ}$$

$\sin A, \cos A, \tan A$ എഴുതുക

8. 10 സെ.മി. വശമുള്ള ഒരു സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 120° ആയാൽ വികർണങ്ങളുടെ നീളം കാണുക

9.



BC യുടെ നീളം കാണുക

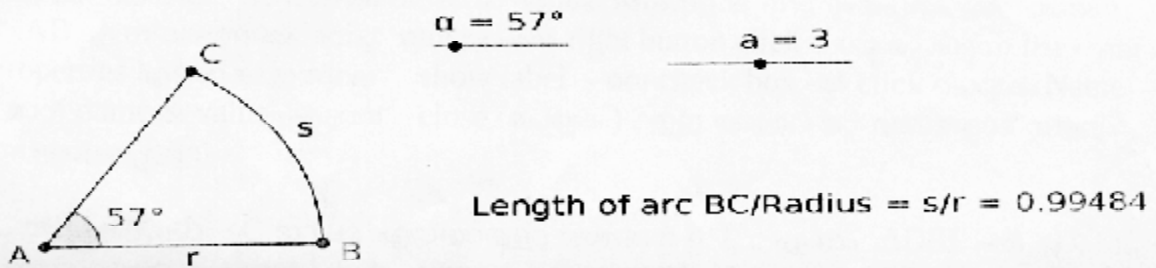
10. ഒരു കുന്നിൽ നിന്നും അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ അതിന്റെ മുകളറ്റം 31° മേൽ കോണിൽ കാണുന്നു. 20 മീറ്റർ കുന്നിന്റെ അടുത്തേക്ക് നടന്ന് അവിടെ നിന്ന് നോക്കിയപ്പോൾ കുന്നിന്റെ മുകളറ്റം 35° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. ഈ വസ്തുതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഏകദേശം ചിത്രം വരയ്ക്കുക. കുന്നിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കുക.

10. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോൺ 70° ഉം അതിന്റെ എതിർവശം 40 സെ.മി. ഉം ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കാണുക

അനുബന്ധം I

Geogebra. ഒരു നിശ്ചിത കോണിന്റെ s/r സ്ഥിരസംഖ്യയാണെന്ന് കാണാൻ.

ഒരു number slider 'a' എടുക്കുക. Min ≥ 0 , ഒരു Angle slider -ഉം ' α ' എടുക്കുക. "Segment with given length from point" എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് AB വരക്കുക. (ഈ tool എടുത്ത് screen -ൽ click ചെയ്യുക. Length കൊടുക്കേണ്ട ഭാഗത്ത് a എന്ന type ചെയ്ത് Close button -ൽ click ചെയ്യുക.). ഈ ബിന്ദുക്കൾക്ക് പേര് നൽകുക. (ഇതിന് ബിന്ദുക്കളിൽ Mouse വച്ച് right button click ചെയ്യുക. കിട്ടുന്ന list - ലെ show label - ലെ check box -ൽ click ചെയ്യുക.) "Angle with given size" tool ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം B യിലും, പിന്നീട് A യിലും click ചെയ്ത് angle = α എന്ന് കൊടുക്കുക. ഇപ്പോൾ ഒരു ബിന്ദു B' കിട്ടും. (ബിന്ദുക്കളുടെ പേര് മാറ്റാം. ഇതിന് ബിന്ദുക്കളിൽ Mouse വച്ച് right button click ചെയ്യുക. കിട്ടുന്ന list - ലെ rename option എടുക്കുക. നിലവിലെ പേര് മാറ്റി പുതിയ പേര് നൽകുക. കൂടാതെ ബിന്ദുക്കളുടെ പേരും Slider -ന്റെയും ഒക്കെ സ്ഥാനം മാറ്റാവുന്നതാണ്. ഇതിന് mouse -ന്റെ left button click & drag ചെയ്യുക.). B' ന് പകരം C എന്ന് പേര് നൽകുക. "Segment between two points" tool ഉപയോഗിച്ച് AB, AC വരക്കുക. "Circular arc with centre between two points" എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം A യിലും തുടർന്ന് B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും Click ചെയ്യുക. ചാപത്തിനും ആരത്തിനും പേര് വേണം. ഇത് rename ചെയ്ത് s, r എന്ന് നൽകുക.



താഴെ എഴുതിയത് പോലെ Input bar - ൽ Type ചെയ്യുക. (quotation ഉൾപ്പെടെ.)

"Length of arc BC/Radius = s/r = "+ s/r തുടർന്ന് Click on enter key.

Length of arc BC/Radius = s/r = <value> വന്നിട്ടുണ്ടാകും. (ഇത് mouse - ഉപയോഗിച്ച് click & drag ചെയ്ത് ആവശ്യമുള്ള സ്ഥലത്ത് മാറ്റുക.).

Slider ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ മാറ്റാം. ചാപനീളവും ആരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അറിയട്ടെ.

അനുബന്ധം II

Geometry, കോണുകൾ ഇലുറായ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുബന്ധം കാണുന്നതിന്.

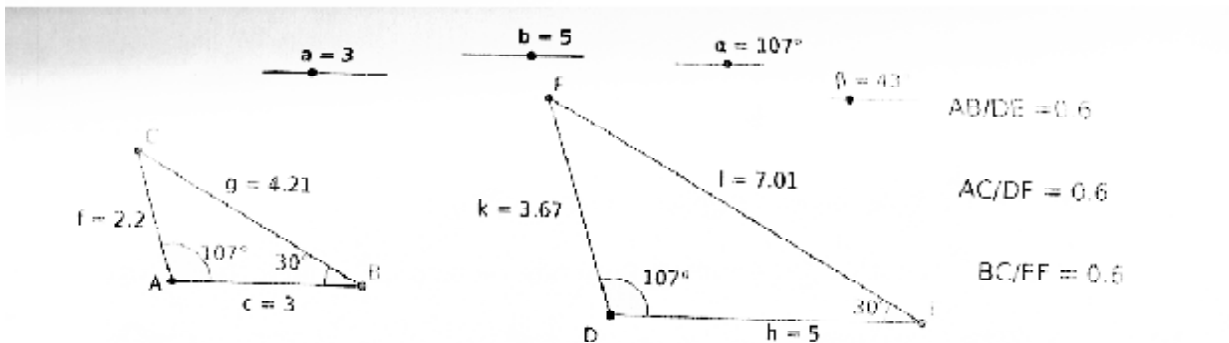
Min ≥ 0 വരുന്ന വിധത്തിൽ 2 number slider 'a, b' എടുക്കുക. ഒരു Angle slider ' α ' എടുക്കുക. (min = 0° , max = 180°). "Segment with given length from point" എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് AB വരയ്ക്കുക. Length = a. ഈ ബിന്ദുക്കൾക്ക് പേര് നൽകുക. "Angle with given size" tool ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം B യിലും, പിന്നീട് A യിലും click ചെയ്ത് angle = α എന്ന് കൊടുക്കുക. ഇപ്പോൾ ഒരു ബിന്ദു B' കിട്ടും. ഇതേ tool ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം A യിലും, പിന്നീട് B യിലും click ചെയ്ത് കോൺ = $180^\circ - \alpha - \beta$ എന്ന് കൊടുക്കുക. (Clock wise ആയി കൊടുക്കണം.) ഒരു ബിന്ദു A' കിട്ടും. "Ray through two point" tool ഉപയോഗിച്ച് AB', BA' വരയ്ക്കുക. "Intersect two object" tool ഉപയോഗിച്ച് AB', BA' ചേർന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. AB', BA' എന്നീ വരകളും, A', B' എന്നീ ബിന്ദുക്കളും hide ചെയ്യണം. (ഇതിന് ഈ ബിന്ദുക്കളിലും, വരകളിലും Mouse വച്ച് right button click ചെയ്യുക. കിട്ടുന്ന list - ലെ show object - ലെ tick mark ഒഴിവിക്കാൻ check box -ൽ click ചെയ്യുക.). "Segment between two points" tool ഉപയോഗിച്ച് AC, BC വരയ്ക്കുക. $\triangle ABC$ കിട്ടും.

"Segment with given length from point" എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് D യിൽ click ചെയ്ത് length = b ന് നൽകി DE വരയ്ക്കുക. $\triangle DEF$ -ഉം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണങ്ങളുടെ നിലവും പേരും അറിയണം. (ഇതിന് AB എന്ന വശത്തിൽ വെച്ച് mouse -ന്റെ right button click ചെയ്യുക. കിട്ടുന്ന list - ലെ object properties എടുക്കുക. ഇതിലെ show label - ലെ check box -ൽ click ചെയ്യുക. Name എന്നത് മാറ്റി name & value എടുത്ത് close ചെയ്യുക.). ഇതു പോലെ മറ്റ് വശങ്ങളുടെ നിലവും പേരും അടയാളപ്പെടുത്തുക.

[$\triangle ABC$ യിൽ $\angle A, \angle B, \angle C$ ഇവക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ g, f, c എന്നും $\triangle DEF$ -ൽ $\angle D, \angle E, \angle F$ ഇവക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ l, k, h എന്നും കരുതിയാണ് ഇനി പറയുന്നതി.] Input bar - ൽ എഴുതിയത് പോലെ Type ചെയ്യുക. (quotation ഉൾപ്പെടെ.) " $AB/DE = +c/h$ enter click ചെയ്യുക. $AB/DE = <value>$ വന്നിട്ടുണ്ടാകും. തുടർന്ന് എഴുതിയത് ഓരോന്നും Input bar - ൽ Type ചെയ്ത് enter click ചെയ്യണം.

" $AC/DE = +f/k$ " " $BC/EF = +g/l$ "

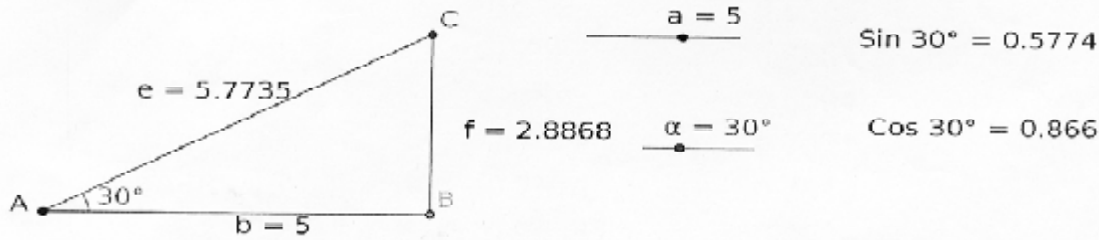
Slider ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ മാറ്റാം. വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുബന്ധം നിരീക്ഷിക്കട്ടെ.



അനുബന്ധം III

കോണുകളുടെ Sin, Cos വിലകൾ കാണാനുള്ള പ്രവർത്തനം.

ഒരു number slider (a) എടുക്കുക. Min ≥ 0 , ഒരു Angle slide -ഉം (α) എടുക്കുക. Max = 90° "Segment with given length from point" എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് AB വരയ്ക്കുക. "Angle with given size" tool ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം B യിലും, പിന്നീട് A യിലും click ചെയ്ത് angle = α എന്ന് കൊടുക്കുക. ഒരു ബിന്ദു B' കിട്ടും. "Ray through two point" tool ഉപയോഗിച്ച് AB' വരയ്ക്കുക. "perpendicular line" tool ഉപയോഗിച്ച് B യിൽക്കൂടി AB ക്ക് ലംബരേഖ വരയ്ക്കുക. "Intersect two object" tool ഉപയോഗിച്ച് AB' , ലംബരേഖ വെട്ടിയിടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. AB' , ലംബരേഖ, B' എന്ന ബിന്ദു hide ചെയ്യണം. "Segment between two points" tool ഉപയോഗിച്ച് AC, BC വരയ്ക്കുക. $\triangle ABC$ കിട്ടും. വശങ്ങളുടെ നീളവും കോണം അടയാളപ്പെടുത്തുക.



താഴെ എഴുതിയത് പോലെ Input bar - ൽ Type ചെയ്യുക.

"Sin "+ α +" = "+ f/e " തുടർന്ന് Click on enter key. Sin <angle> = <value> വന്നിട്ടുണ്ടാകും.

"Cos "+ α +" = "+ b/e " . Click on enter key. Cos <angle> = <value> വന്നിട്ടുണ്ടാകും.

Slider ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ മാറ്റാം. ത്രികോണമിതി വിലകൾ കാണട്ടെ.

അനുബന്ധം IV

Angle (Degree, Minutes)	Sine Aryabhatan	Modern Sine
03° 45'	0.06545	0.0654
07° 30'	0.1306	0.1305
11° 15'	0.1952	0.1951
15° 00'	0.2589	0.2588
18° 45'	0.3215	0.3227
22° 30'	0.3824	0.3827
26° 15'	0.4421	0.4423
30° 00'	0.5000	0.5000
37° 30'	0.6087	0.6088
41° 15'	0.6595	0.6594
45° 00'	0.7071	0.7071
48° 45'	0.7519	0.7519
52° 30'	0.7933	0.7934
56° 15'	0.8316	0.8315
60° 00'	0.8664	0.8666
63° 45'	0.8973	0.8969
67° 50'	0.9243	0.9239
71° 15'	0.9471	0.9469
75° 00'	0.9658	0.9659
78° 45'	0.9819	0.9818
82° 30'	0.9915	0.9914
86° 15'	0.9980	0.9979
90° 00'	1.0000	1.0000

ഒരു ചരിത്രം

ഭാരതീയർ വൃത്തത്തെ 4 പാദങ്ങളായും (ഒരു പാദം = 90°) ഒരു പാദത്തെ 3 രാശികളായും (ഒരു രാശി = 30°) ഒരു രാശിയെ 30 അംശങ്ങളായും (ഒരു അംശം = 1°) ഒരു അംശത്തെ 60 കലകളായും (ഒരു കല = 1 മിനുട്ട്) ഒരു കലയെ 60 വികലകളായും (ഒരു വികല = 1 സെക്കന്റ്) ഭാഗിച്ചു.

$$\text{ആര്യഭടൻ } R = \frac{c}{2\pi} = \frac{360 \times 60}{2 \times 3.1416} \approx 3438 \text{ മിനുട്ട് അല്ലെങ്കിൽ } 51^\circ \text{ എന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.}$$

വൃത്ത പരിധിയെ 21600 തുല്യഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കുകയും ആരവും ചാപനീളവും തുല്യമായാൽ കേന്ദ്രകോൺ 3438 മിനുട്ട് അല്ലെങ്കിൽ ഏകദേശം 57° എന്നതാണ് ഒരു റേഡിയൻ

ഞാൺ പട്ടികയും മട്ടത്രികോണവശവും

ടെക്സ്റ്റ് പേജ് നമ്പർ 79 ലെ സൈഡ് ബോക്സ് ചർച്ച ചെയ്യുക

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശം കാണാൻ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ഞാണായി വശത്തെ മാറ്റുകയാണ് ഇവിടെ ചെയ്തത്.

40° കോണിന്റെ എതിർവശം കാണാൻ 80° കോണിന്റെ ചാപത്തിലുള്ള ഞാണിന്റെ നീളമായി മാറ്റുന്നു. ആരം 1 യൂണിറ്റ് ആയ വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ 80° ഡിഗ്രി വരുമ്പോഴുള്ള ചാപത്തിലുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം പട്ടികയിൽ നിന്ന് കണ്ടെത്തി അതിനെ 4 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് എതിർവശം കാണുന്നു. പിന്നീട് മൂന്നാമത്തെ വശം കാണുന്നതിന് പൈതഗോറസ് തത്വം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇത്തരം ചർച്ചയിലൂടെ മുൻകാലങ്ങളിലുള്ള ഗണിതത്തിന്റെ വളർച്ചയും ചരിത്രബോധവും കുട്ടികളിൽ ഉണ്ടാക്കുന്നത് നന്നായിരിക്കും.

കോണളവും ചാപനീളവും

പേജ് നമ്പർ 75, 76, 77 ലെ സൈഡ് ബോക്സ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യട്ടെ

$$45 \text{ ഡിഗ്രി} = 360 \text{ ന്റെ } \frac{1}{8} \text{ ഭാഗം}$$

$$45 \text{ ഡിഗ്രി കോണിന്റെ ചാപനീളം വൃത്തചുറ്റളവിന്റെ } \frac{1}{8} \text{ ഭാഗം}$$

$$\therefore 60 \text{ ഡിഗ്രി} = 360 \text{ ന്റെ } \frac{1}{6} \text{ ഭാഗം}$$

$$60 \text{ ഡിഗ്രി കോണിന്റെ ചാപനീളം} = \text{വൃത്തചുറ്റളവിന്റെ } \frac{1}{6} \text{ ഭാഗം വൃത്തചുറ്റളവിന്റെ } \frac{1}{4}$$

$$\text{ഭാഗമാണ് ചാപനീളം, എങ്കിൽ കോണിന്റെ അളവ്} = 360 \text{ ന്റെ } \frac{1}{4} \text{ ഭാഗം } 360 \times \frac{1}{4} = 90 \text{ ഡിഗ്രി}$$

ചാപനീളം കോണിന്റെ അളവായി എടുക്കാവുന്നതാണ്

$$\therefore \text{കോണിന്റെ അളവ്} = \frac{\text{ചാപനീളം}}{\text{വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്}} \times 360 \text{ ഡിഗ്രി}$$

$$\text{ഒരേ കോണിന് വൃത്തത്തിന്റെ വലുപ്പം മാറിയാലും } \frac{\text{ചാപനീളം}}{\text{വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്}} \text{ എന്നത്}$$

$$\text{ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയാണല്ലോ } \frac{S}{2\pi r} \text{ സ്ഥിര സംഖ്യ}$$

$$\frac{S}{2\pi r} \times 360 = \text{കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ്}$$

S

$$\frac{S}{r} \times \frac{360}{2\pi} = \frac{S}{r} \times \frac{180}{\pi}$$

ഒരേ കോണിന് s ഉം r ഉം മാറുമെങ്കിലും $\frac{S}{r}$ മാറുന്നില്ല
 $\frac{S}{r}$ ലെ വില മാറുന്നത് കോണിന്റെ അളവ് മാറുമ്പോഴാണ്
 അതിനാൽ $\frac{S}{r}$ തന്നെ കോണളക്കാൻ ഉപയോഗിക്കാം.

ഈ അളവ് ഡിഗ്രിയിലല്ല. ഇതിനെ റേഡിയൻ അളവ് എന്നും
 റേഡിയൻ അളവിനെ $\frac{180}{\pi}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കോണളവ് ഡിഗ്രിയിൽ കിട്ടുമെന്ന് തിരിച്ചറിയുക.
 ഐ.സി.ടി. ഉപയോഗിച്ച് $\frac{S}{r}$ സ്ഥിരസംഖ്യയെന്ന് കണ്ടെത്താം.

* പേജ് 78 സൈഡ്ബോക്സ്

കോണളവ് ഞാണിലൂടെ

ചാപത്തിലൂടെ അളക്കാവുന്ന കോണിനെ ആ ചാപത്തിന്റെ ഞാണിന്റെ നീളത്തിലൂടെ അളക്കാ
 മെന്ന് കാണുകയാണ് ഇവിടെ. അതിനനുസരിച്ച പട്ടിക നിർമ്മിച്ചതായും മറ്റുമുള്ള കാര്യങ്ങൾ കൂട്ടി
 കളെ ചരിത്രാനുഷ്ഠാനത്തിലേക്ക് നയിക്കുന്നതാണ്.

പേജ് 89 ലെ സൈഡ്ബോക്സ് ചർച്ചയ്ക്ക് വിധേയമാക്കുക

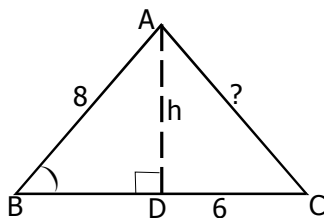
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d \quad \text{എന്ന് ബോധ്യമാകും.}$$

A, B, C ഇവ 90° ആയാലും ന്യൂനകോൺ ആയാലും ബൃഹത്തകോൺ ആയാലും ശരിയാണെന്ന്
 കാണുമല്ലോ

ഈ തത്വം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്ത പ്രശ്നങ്ങൾ ചെയ്തുന്നോക്കുക

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 120° ആയും എതിർവശം 10 സെ.മി. ആയാൽ
 പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എത്ര ?

രണ്ട് വശങ്ങളും ഉൾക്കോണും മൂന്നാമത്തെ വശത്തെ നിർണയിക്കുന്നു.



$$\begin{aligned} h &= 8 \times \sin 40 \\ BD &= 8 \times \cos 40 \\ DC &= 6 - BD = 6 - 8 \cos 40 \\ AC^2 &= h^2 + DC^2 = 8^2 \sin^2 40 + (6 - 8 \cos 40)^2 \\ &= 8^2 \sin^2 40 + 6^2 + 8^2 \cos^2 40 - 2 \times 6 \times 8 \cos 40 \\ &= 8^2 (\sin^2 40 + \cos^2 40) + 6^2 - 2 \times 6 \times 8 \cos 40 \\ &= 8^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 8 \cos 40 \\ &= 64 + 36 - 96 \cos 40 \\ &= 100 - 96 \cos 40 \\ &= 100 - 96 \times 0.7660 \\ &= 100 - 73.5360 = 26.4640 \end{aligned}$$

പേജ് നമ്പർ 86, 87 ചർച്ച ചെയ്താൽ

പൊതു സൂത്രവാക്യം കാണുവാൻ കഴിയുന്നു

കോണിന്റെ അളവ് ബൃഹത് കോൺ ആയാലും ഈ ബന്ധം

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ}$$

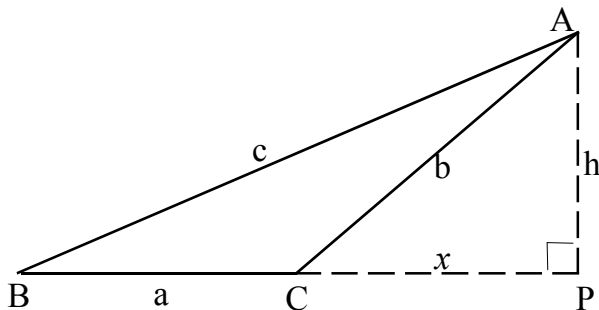
$$\cos 90^\circ = 0, \cos (180^\circ - A) = -\cos A \text{ എന്ന് കാണാം.}$$

മട്ടത്രികോണം, ന്യൂനത്രികോണം, ബൃഹത്ത്രികോണം എന്നിവയിൽ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം താഴെ കാണുന്നവിധം വിശദീകരിക്കുന്നത് നോക്കുക. മേൽ പറഞ്ഞ വശങ്ങളുടെ ബന്ധ വുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

* ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങൾ തന്നാൽ അത് മട്ടത്രികോണമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കാൻ സാധിക്കുമല്ലോ. എന്നാൽ അത് ന്യൂനത്രികോണമാണോ, ബൃഹത്ത്രികോണമാണോ എങ്ങനെ കണ്ടെത്തും ?

$\triangle ABC$ ൽ LA, LB, LC , എന്നിവയ്ക്ക് എതിരെയുള്ള വശത്തെ യഥാക്രമം a, b, c എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു കോൺ LC ബൃഹത്കോൺ എന്നിരിക്കട്ടെ



$\triangle APC$ യിൽ നിന്ന്

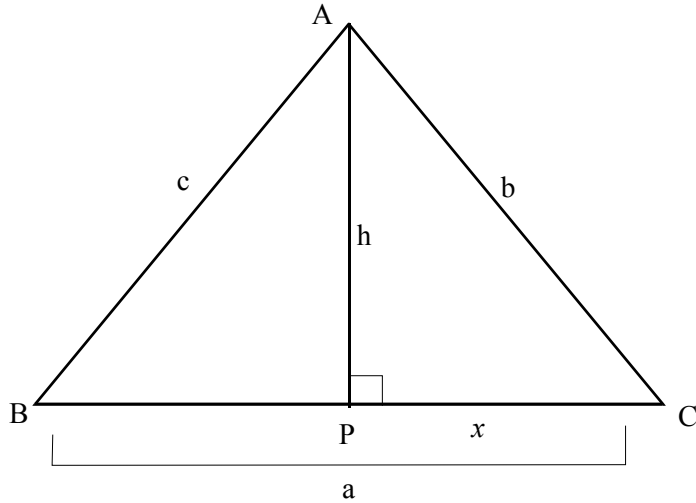
$$h^2 = b^2 - x^2$$

മട്ടത്രികോണം APB യിൽ നിന്ന്

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+x)^2 + h^2 \\ &= a^2 + x^2 + 2ax + b^2 - x^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ax \end{aligned}$$

$$c^2 > a^2 + b^2$$

* മൂന്ന് കോണുകളും ന്യൂനകോൺ ആയാൽ
 വശങ്ങളിലേക്ക് എതിർശീർഷത്തിൽ നിന്ന്
 വരയ്ക്കുന്ന ലംബം ത്രികോണത്തിനകത്താണല്ലോ



മട്ട $\triangle ABP$ ൽ $h^2 = c^2 - (a-x)^2$
 മട്ട $\triangle APC$ ൽ $b^2 = h^2 + x^2 = c^2 - (a-x)^2 + x^2$
 $\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$
 $\therefore c^2 < a^2 + b^2$ പോലെ $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$

$\therefore$ രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് തുല്യമായാൽ അത് ഒരു മട്ട ത്രികോണം. വലുതായാൽ ആ വശത്തിന് എതിരെ ആ കോൺ ബൃഹത്തകോൺ, ചെറുതായാൽ അത് ന്യൂനകോൺ.